التاريخ: / /

الموضوع: م 15.

مبرهنة: لتكن ℓ فئة و $x, x' \in ob(\ell)$ لأجل كل مورفيزم دالي $f: h_x \to h_{x'}$

يوجد مورفيزم وحيد $\mu: x' \to x$ يحقق: $f(y)(u) = u.\mu$ لأجل كل $y \in ob(\ell)$ و

لأجل كل مورفيزم للفئة ℓ، فضلاً عن ذلك

~~[illegible]~~

f إيزومورفيزم دالي إذا وفقط إذا μ إيزومورفيزم

البرهان: لتكن $x, x' \in ob(\ell)$ عندئذٍ $h_x, h_{x'}: \ell \to set$ دوال مباشرة عندئذٍ حسب المبرهنة

الأخيرة، يوجد تطبيق متباين وغامر $\alpha: Hom(h_x, h_{x'}) \to h_{x'}(x)$

$: Hom(h_x, h_{x'}) \to \ell(x', x)$

ليكن $f: h_x \to h_{x'}$ مورفيزم دالي، لنضع $\alpha(f) = \mu$

إنَّ $\mu: x' \to x$ مورفيزم للفئة ℓ $\qquad \beta: h_{x'}(x) \to Hom(h_x, h_{x'})$

لتكن $y \in ob(\ell)$ عندئذٍ لأجل كل مورفيزم $\qquad \beta(\mu): h_x \to h_{x'}$

$u: x \to y \qquad \beta . \alpha = I_{Hom(h_x, h_{x'})}$

فإنَّ $f(y)(u) = u.\mu \qquad \beta.\alpha(f) = f$

$f(y) = \beta(\alpha(f))(y)$

- إثبات وحدانية μ:

$f(y) = \beta(\mu)(y): h_x(y) \to h_{x'}(y)$

ليكن $\psi: x' \to x$ مورفيزم آخر للفئة ℓ $\qquad : \ell(x,y) \to \ell(x',y)$

يحقق: $f(y)(u) = u.\psi$

$f(y)(u) = \beta(\mu)(y)(u) = u.\mu$

عندئذٍ لأجل $x = y$ و $u = I_x$ فإنَّ

$\mu = I_x.\mu = f(x)(I_x)$ $\Leftarrow$ $\mu = \alpha(f) = f(x)(I_x) = I_x.\psi = \psi$

لزوم الشرط: لنفرض أنَّ $f: h_x \to h_{x'}$ عندئذٍ يوجد مورفيزم دالي $g: h_{x'} \to h_x$

يحقق $g.f = I_{h_x}$ و $f.g = I_{h_{x'}}$

لما كان $x' \in ob(\ell)$ فإنَّ التطبيق $\alpha': Hom(h_{x'}, h_x) \to h_x(x')$

$: Hom(h_{x'}, h_x) \to \ell(x, x')$

لنفرض أنَّ $\mu': x \to x'$ و $\alpha'(g) = \mu'$

$g(y)(u) = u.\mu' \qquad \forall y \in ob(\ell)$

$\forall u: x' \to y$

أيضاً لما كان ~~التطبيق~~ $x \in ob(\ell)$ فإن التطبيق $\alpha'': Hom(h_x, h_x) \to h_x(x) = \ell(x,x)$

$\alpha''(I_{h_x}) = \alpha''(g.f) = I_{h_x}(x)(I_x) = I_x$

$I_x = \alpha''(I_{h_x}) = \alpha''(g.f) = (g.f)(x)(I_x) = (g(x).f(x))(I_x)$

$= g(x)(f(x)(I_x)) = g(x)(I_x.\mu) = g(x)(\mu) = \mu.\mu'$

أيضاً لما كان $x' \in ob(\ell)$ فإن التطبيق $\alpha_0 : Hom(h_{x'}, h_{x'}) \longrightarrow h_{x'}(x') = \ell(x', x')$

$\alpha_0(I_{h_{x'}}) = \alpha_0(f.g) = I_{h_{x'}}(x')(I_{x'}) = I_{x'}$

$I_{x'} = \alpha_0(I_{h_{x'}}) = \alpha_0(f.g) = \cancel{I_{h_{x'}}(x')(I_{x'})}$

$= (f.g)(x')(I_{x'}) = (f(x').g(x'))(I_x) = f(x')(g(x')(I_{x'}))$

$= f(x')(I_{x'}.\mu') = f(x').(\mu') = \mu'.\mu$

ومنه $\mu'.\mu = I_{x'}$ و $\mu.\mu' = I_x$ ومنه μ ايزومورفيزم للفئة ℓ

* التحضيرة *

كفاية الشرط : لنفرض أنّ $\mu : x' \longrightarrow x$ ايزومورفيزم عندئذٍ يوجد مورفيزم $\mu' : x \longrightarrow x'$ للفئة ℓ بحيث $\mu'.\mu = I_{x'}$ و $\mu.\mu' = I_x$

لنوجد مورفيزم دالي $f' : h_{x'} \longrightarrow h_x$

حسب مبرهنة السابقة و لأجل كل $x' \in ob(\ell)$ و لأجل الدالي $h_{x'}$ فإن التطبيق

$\alpha : Hom(h_{x'}, h_x) \longrightarrow h_x(x') = \ell(x, x')$ متباين وغامر

* ولما كان $\mu' \in h_x(x')$ فإنّه يوجد $f' : h_{x'} \longrightarrow h_x$ بحيث $\alpha(f') = \mu'$

لنبرهن على أنّ $f.f' = I_{h_{x'}}$

$f.f'(y) = f(y).f'(y)$ تطبيقات

أياً كان $y \in ob(\ell)$ فإنّ كلاً من $f'(y) . f(y)$

مورفيزم للفئة sets (تطبيقات)

$f.f'(y)(u) = f(y).f'(y)(u) = f(y)(f'(y)(u))$

وذلك لأجل أي مورفيزم $u \in \ell(x', y)$

$f.f'(y)(u) = f(y)(u.\mu') = (u.\mu').\mu = u(\mu'.\mu) = u.I_{x'} = u$

ومنه

$f.f'(y) = I_{h_{x'}(y)} = I_{h_{x'}}(y)$

ومنه $f.f' = I_{h_{x'}}$

التاريخ : / /

الموضوع :

ولأجل كل $y \in ob(\mathcal{L})$ ثابتة ، $f'.f(y)(v) = f'(y).f(y)(v)$

وذلك لأجل كل $v \in h_x(y) = \mathcal{L}(x,y)$

$= f'(y)\big(f(y)(v)\big) = f'(y)(v.\mu) = (v.\mu).\mu' = v.(\mu.\mu') = v.I_x$

$f'.f(y)(v) = v$

ومنه $f'.f(y) = I_{h_x(y)} = I_{h_x}(y)$

ومنه $f'.f = I_{h_x}$

... The End ...

Bayan Toumah

لا تقل يا رب لديّ هم كبير

بل قل يا هم لديّ رب كبير