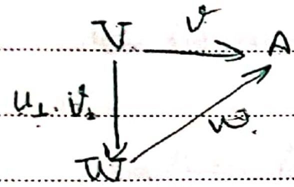
الموضوع: التاريخ: 1 / 6 / 1

ومنه نجد أن $w \xrightarrow{\ U_1 . V_1\ } V$ مورفيزم للفئة $\mathcal{l}$



وتحقق:
$w . (u_1 . v_1) = (w . u_1) . v_1 = u . v_1 = v$

ومنه نجد أن $w \leq v$ أي أن العلاقة ($\leq$) متعدية.

م-4 **تمهيدية**: لتكن $\mathcal{l}$ فئة و $A \in ob(\mathcal{l})$ و $u, v \in M_A$ الشروط الآتية متكافئة:

(14) 1. $u \leq v$ و $v \leq u$

2. توجد إيزومورفيزمات وحيدة $u_1 \in \mathcal{l}(U, V)$ و $v_1 \in \mathcal{l}(V, U)$ بحيث:
$u . v_1 = v$ و $v . u_1 = u$

البرهان: (1) ⇐ (2): لنفرض أن $u \leq v$ و $v \leq u$ عندئذٍ توجد مورفيزمات وحيدة $u_1 \in \mathcal{l}(U, V)$ و $v_1 \in \mathcal{l}(V, U)$ بحيث $v . u_1 = u$ و $u . v_1 = v$

$v_1 . u_1 : U \longrightarrow U$

$u_1 . v_1 : V \longrightarrow V$

لو ضرب بالمطابق يعطي نفسه

$u . (v_1 . u_1) = (u . v_1) . u_1 = v . u_1 = u$ ولدينا $u . (v_1 . u_1) = u . I_U$

ولما كان u مونومورفيزم نجد أن $v_1 . u_1 = I_U$

$v . (u_1 . v_1) = (v . u_1) . v_1 = u . v_1 = v$ ولدينا $v . (u_1 . v_1) = v . I_V$

ولما كان v مونومورفيزم نجد أن $u_1 . v_1 = I_V$

ومنه كلاً من u_1 و v_1 إيزومورفيزم

(2) ⇐ (1) واضح

(15) **مبرهنة**: لتكن $\mathcal{l}$ فئة و $A \in ob(\mathcal{l})$، العلاقة $\mathcal{f}$ المعرفة على الصف M_A بالشكل:

$\forall u, v \in M_A$; $v \mathcal{f} u \iff v \leq u$ و $u \leq v$

هي علاقة تكافؤ.

البرهان: واضح $\mathcal{f}$ انعكاسية و متعدية و تناظرية.

تعريف: لتكن $\mathcal{l}$ فئة و $A \in ob(\mathcal{l})$. نسمي كل ممثل بصف تكافؤ ~~العلاقة~~ العلاقة $\mathcal{f}$ المعرفة على M_A شيء جزئي في A.

(5) تمهيدية: لتكن $\mathcal{C}$ فئة و $A \in ob(\mathcal{C})$ و ρ علاقة التكافؤ المعرفة على M_A العلاقة (≤) المعرفة على $\frac{M_A}{\rho}$ بالشكل: $\forall \bar{v}, \bar{u} \in \frac{M_A}{\rho}$; $\bar{v} \le \bar{u} \iff v \le u$

البرهان: انعكاسية ⇐ $\forall \bar{u} \in \frac{M_A}{\rho}$, $u \le u \Rightarrow \bar{u} \le \bar{u}$ (1)

(2) $\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \frac{M_A}{\rho}$: ⇐ ممثل $\bar{u}$ هو u و ممثل $\bar{v}$ هو v و ممثل $\bar{w}$ هو w

$\Rightarrow \bar{v} \le \bar{u}$, $\bar{u} \le \bar{w}$ ⇐ من الفرض $v \le u$, $u \le w$

متعدية $\Rightarrow v \le w \Rightarrow \bar{v} \le \bar{w}$

(3) تخالفية $\bar{u} \le \bar{v}$, $\bar{v} \le \bar{u} \Rightarrow u \le v$, $v \le u \Rightarrow u \rho v \Rightarrow \bar{u} = \bar{v}$

≤ علاقة ترتيب (لنفس الشيء يعرف بالنسبة للخارج)

(17) مبرهنة: لنفرض أن $\mathcal{C}$ فئة المودولات فوق الحلقة الواحدية R وأن $u: A \to B$ تشاكل مودولات. الشروط الآتية متكافئة: 1- المورفيزم u ابيمورفيزم 2- التشاكل u غامر.

البرهان: (1⇐2): لنفرض أن u ابيمورفيزم وأن التشاكل u ليس غامر عندئذ: $u(A) \subsetneq B$.

لنفرض أن $B_i \cong B$: $i = 1, 2$ و $C = B_1 \oplus B_2$

حيث π_i القائلات $\pi_i : B \to B_i$

الاحتواء القانوني $\tau_i : B_i \to C$

$v_i = \tau_i \circ \pi_i : B \to C$

أيّاً كانت $x \in u(A)$ فإن $S = \{v_1(x) - v_2(x)\} \subset C$

ولنفرض أن K المودول الجزئي من C المولد بالمجموعة S ولنفرض أن $D = \frac{C}{K}$ مودول خارج

و $w : C \to D = \frac{C}{K}$ التشاكل القانوني الغامر

$v_1(x) = \tau_1 \circ \pi_1(x) = \tau_1(\pi_1(x)) = \tau_1(x, 0) = (x, 0)$

$v_2(x) = \tau_2 \circ \pi_2(x) = \tau_2(\pi_2(x)) = \tau_2(0, x) = (0, x)$

$v_1(x) - v_2(x) = (x, -x)$

لما كانت $u(A) \subsetneq B$ يوجد $y \in B$ بحيث $y \notin u(A)$ ومنه $v_1(y) - v_2(y) \notin K$

وبالتالي $w(v_1(y) - v_2(y)) = [v_1(y) - v_2(y)] + K$

$[v_1(y) + K] - [v_2(y) + K] \neq K$

$v_1(y) + K \neq v_2(y) + K \Rightarrow w \circ v_1(y) \neq w \circ v_2(y)$

ومنه $w \circ v_1 \neq w \circ v_2$

التاريخ: / 18 /   الموضوع:

$B \leftarrow A : u$ من جهة أخرى، أيًا كان $x \in A$ فإن $u(x) \in B$ وأن،

$v_1(u(x)) - v_2(u(x)) \in K \quad \overset{صورة}{\Leftarrow} \quad [v_1.u(x) - v_2.u(x)] + K = K$

$\Rightarrow v_1.u(x) + K = v_2.u(x) + K \quad \Rightarrow w.v_1.u(x) = w.v_2.u(x)$

$\Rightarrow w.v_1.u = w.v_2.u \Rightarrow (w.v_1).u = (w.v_2).u$

وبما أن u إبيمورفيزم نجد أن $w.v_1 = w.v_2$ وهذا تناقض غير ممكن.

$② \Leftarrow ①$

تعريف: لتكن ℓ_1 و ℓ_2 فئتين، نعرف جداء ديكارتي $\ell_1 \times \ell_2$، نعرف صف الأشياء $ob(\ell_1 \times \ell_2)$ بأنه الصف المؤلف من جميع الثنائيات الممكنة (A,B) حيث

$A \in ob(\ell_1)$ و $B \in ob(\ell_2)$

وصف المورفيزمات $Mor(\ell_1 \times \ell_2)$ المؤلفة من جميع الثنائيات الممكنة:

$$(\underbrace{f_1, f_2}_{f}) : (\underbrace{A_1, A_2}_{A}) \longrightarrow (\underbrace{B_1, B_2}_{B})$$

حيث $f_2 \in \ell_2(A_2, B_2)$ و $f_1 \in \ell_1(A_1, B_1)$ الصنفين السابقين

تحققان جميع شروط الفئة:

* $(f_1, f_2).(g_1, g_2) = (f_1.g_1, f_2.g_2)$
* $I_A = I_{(A_1, A_2)} = (I_{A_1}, I_{A_2})$

٣. الدوال المرافقة:

(15) **مبرهنة**: لتكن ℓ_1, ℓ_2 فئتين و $F: \ell_1 \to \ell_2$ و $G: \ell_2 \to \ell_1$ دوال مباشرة

لنفرض أن $\ell = \ell_1 \times \ell_2$ عندئذٍ توجد دوال مباشرة:

1. $Hom_{\ell_1}(G): \ell \to set's$
2. $Hom_{\ell_2}(F): \ell \to set's$

البرهان: 1. لنعرف $Hom_{\ell_1}(G)$ من خلال: تطبيق الأشياء:

أي: $\forall A = (A_1, A_2) \in ob(\ell) \quad \{A_1 \in ob(\ell_1), A_2 \in ob(\ell_2), G(A_2) \in ob(\ell_1)\}$

لنضع

$Hom_{\ell_1}(G)(A) = \ell_1(A_1, G(A_2))$

- تطبيق المورفيزمات: فإنه ~~...~~ لأجل أي مورفيزم

$f = (f_1, f_2) : A = (A_1, A_2) \to B = (B_1, B_2)$

للفئة ℓ

$(A_1, A_2) = (B_1, B_2)$

$A_1 = B_1, \ A_2 = B_2$

$G(A_2) = G(B_2)$

$\ell_1(A_1, G(A_2)) = \ell_1(B_1, G(B_2))$

$f_1 \in \ell_1^{\circ}(A_1,B_1) = \ell_1(B_1,A_1)$ و $f_2 \in \ell_2(A_2,B_2)$

$Hom_{\ell_1}(G)(f): Hom_{\ell_1}(G)(A) \longrightarrow Hom_{\ell_2}(G)(B)$

$Hom_{\ell_1}(G)(f): \ell_1(A_1, G(A_2)) \longrightarrow \ell_1(B_1, G(B_2))$

~~$A_1 \xrightarrow{u} G(A_2)$~~

إذا كانت $u \in \ell_1(A_1, G(A_2))$ لنضع

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[rdd, "G(f_2).u.f_1"'] & A_1 \arrow[d, "u"] \\ & G(A_2) \arrow[d, "G(f_2)"] \\ & G(B_2) \end{tikzcd}$$

$Hom_{\ell_1}(G)(f)(u) = G(f_2).u.f_1$

تطبيق إذا كان $u_1 = u_2$ فإن $u_1.f_1 = u_2.f_2$

ومنه $G(f_2).u_1.f_1 = G(f_2).u_2.f_2$

ليكن $A \in ob(\ell)$ عندئذ:

$Hom_{\ell_1}(G)(I_A): Hom_{\ell_1}(G)(A) \longrightarrow Hom_{\ell_1}(G)(A)$

$: \ell_1(A_1, G(A_2)) \longrightarrow \ell_1(A_1, G(A_2))$

$\forall u \in \ell_1(A_1, G(A_2))$: $Hom_{\ell_1}(G)(I_A)(u) = G(I_{A_2}).u.I_{A_1}$

$I_A = (I_{A_1}, I_{A_2})$ $\qquad = I_{G(A_2)}.u = u$

ومنه $\boxed{Hom_{\ell_1}(G)(I_A) = I_{Hom_{\ell_1}(G)(A)}}$

* ليكن $f: A \longrightarrow B$ و $g: B \longrightarrow D$ مورفيزمين الفئة ℓ

$f = (f_1, f_2)$: $f_1 \in \ell_1^{\circ}(A_1,B_1) = \ell_1(B_1,A_1)$ و $f_2 \in \ell_2(A_2,B_2)$

$g = (g_1, g_2)$: $g_1 \in \ell_1^{\circ}(B_1,D_1) = \ell_1(D_1,B_1)$ و $g_2 \in \ell_2(B_2,D_2)$

$g.f: A \longrightarrow D$

$g.f = (g_1.f_1, g_2.f_2)$: $-\, g_1.f_1 \in \ell_1^{\circ}(A_1,D_1)$

$-\, g_2.f_2 \in \ell_2(A_2,D_2)$

$-\, f_1.g_1 \in \ell_1(D_1,A_1)$

$Hom_{\ell_1}(G)(g.f): Hom_{\ell_1}(G)(A) \longrightarrow Hom_{\ell_1}(G)(D)$

$\ell_1(A_1, G(A_2)) \longrightarrow \ell_1(D_1, G(D_2))$

$\forall u \in \ell_1(A_1, G(A_2))$; $Hom_{\ell_1}(G)(g.f)(u) = G(g_2.f_2).u.(f_1.g_1)$

$= G(g_2).(G(f_2).u.f_1).g_1$

"ضرب تجميعي" $= Hom_{\ell_1}(G)(g)(G(f_2).u.f_1)$

$= \underbrace{Hom_{\ell_1}(G)(g)}_{\text{تطبيق}}(\underbrace{Hom_{\ell_1}(G)(f)(u)}_{\text{تطبيق}})$

$$= Hom_{\ell_1}(G)(g) \cdot Hom_{\ell_1}(G)(f)(u)$$

$$\Rightarrow Hom_{\ell_1}(G)(g.f) = Hom_{\ell_1}(G)(g) \cdot Hom_{\ell_1}(G)(f)$$

2. لنعرف $Hom_{\ell_2}(F)$ من خلال: تطبيق الأشياء $\forall A \in ob(\ell)$

لنضع $A=(A_1,A_2)$ $\quad Hom_{\ell_1}(F)(A) = \ell_2(F(A_1),A_2)$

- تطبيق المورفيزمات: لأجل أي مورفيزم $f: A \to B$ للفئة $\ell_2(F(A_1),A_2)$. لنضع

$$Hom_{\ell_2}(F)(f): Hom_{\ell_2}(F)(A) \to Hom_{\ell_2}(F)(B)$$

$$: \ell_2(F(A_1),A_2) \to \ell_2(F(B_1),B_2)$$

$$\forall v \in \ell_2(F(A_1),A_2)$$

$$f = (f_1,f_2) \;;\; f_1 \in \ell_1^{op}(A_1,B_1) = \ell_1(B_1,A_1)$$

$$; f_2 \in \ell_2(A_2,B_2)$$

ولنفرض أن $Hom_{\ell_2}(F)(f)(v) = f_2 \circ v \circ F(f_1)$

$$\begin{tikzcd} F(B_1) \arrow[r, "F(f_1)"] \arrow[rdd, "f_2 . v . F(f_1)"'] & F(A_1) \arrow[d, "v"] \\ & A_2 \arrow[d, "f_2"] \\ & B_2 \end{tikzcd}$$

بطريقة مشابهة يمكن التحقق من جميع شروط الدالي المباشر

* تعريف: نقول عن الدالي $G: \ell_2 \to \ell_1$ إنه مرافق للدالي $F: \ell_1 \to \ell_2$

إذا وجد ايزومورفيزم دالي: $\varphi: Hom_{\ell_2}(F) \to Hom_{\ell_1}(G)$.

- تكافؤ الفئات:

(19) تمهيدية: لتكن ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 فئات و $F, G: \ell_1 \to \ell_2$, $T: \ell_2 \to \ell_3$

دوال مباشرة ، ولنفرض أن $\varphi: F \to G$ مورفيزم دالي.

عندئذ يوجد مورفيزم دالي $T \circ \varphi : T \circ F \to T \circ G$ $\quad \ell_1 \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \ell_2 \underset{T}{\overset{T}{\rightrightarrows}} \ell_3$

معرف بالشكل: $\forall A \in ob(\ell_1);\; T \circ \varphi(A) = T(\varphi(A))$

البرهان: واضح أن كلاً من

$$T \circ F, T \circ G : \ell_1 \to \ell_2$$

هو دالي مباشر

ليكن $A \in ob(\mathcal{C}_1)$ ، عندئذٍ لما كان $\varphi : F \longrightarrow G$ مورفيزم دالي فإن:
$\varphi(A) : F(A) \longrightarrow G(A)$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}_2$ وعليه فإن:
$T(\varphi(A)) : T\cdot F(A) \longrightarrow T\cdot G(A)$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}_3$
ليكن $u : A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}_1$ ، ولنبرهن على أن المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{array}{ccc} T\cdot F(A) & \xrightarrow{T\cdot\varphi(A)} & T\cdot G(A) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle T\cdot F(u)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle T\cdot G(u)} \\ T\cdot F(B) & \xrightarrow{T\cdot\varphi(B)} & T\cdot G(B) \end{array}$$

أي لنبرهن أنه: $(T\cdot G(u))\cdot(T\cdot\varphi(A)) = T\cdot\varphi(B)\cdot T\cdot F(u)$

$$\underline{T\cdot G(u)}\cdot T\cdot\varphi(A) = T(G(u))\cdot T(\varphi(A)) \overset{\text{لأن } T \text{ دالي مساير}}{=} T(G(u)\cdot\varphi(A)) = T(\varphi(B)\cdot F(u))$$

ولما كان $\varphi : F \longrightarrow G$ مورفيزم دالي فإنه لأجل المورفيزم $u : A \longrightarrow B$ المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\varphi(A)} & G(A) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle F(u)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle G(u)} \\ F(B) & \xrightarrow{\varphi(B)} & G(B) \end{array}$$

كما أن

$= T(\varphi(B))\cdot T(F(u))$

$= T\cdot\varphi(B)\cdot T\cdot F(u)$

وهذا يبين أن $T\cdot\varphi$ مورفيزم دالي.