١٨ / ٣ / ٢٠١٩ المحاضرة الثامنة تفاضلية 2 د. ملك ماردين

عنوان المحاضرة :

مسائل الشروط للمعادلات التفاضلية العادية باستخدام تحويلات لابلاس :

لاستخدام مسائل الشروط الابتدائية لطريقة تحويلات لابلاس نتبع ما يلي :

1. نأخذ تحويلات لابلاس لطرفي المعادلة التفاضلية العادية.
2. نحصل على معادلة بالنسبة لتحويلة لابلاس ثم نحل هذه المعادلة بالنسبة $Y(s)$
3. نأخذ تحويلات لابلاس العكسية لطرفي المعادلة فنحصل على حل المعادلة $Y(t)$

علماً أنه :

$$L[y(t)] = Y(s)$$

$$L[y'(t)] = s\,Y(s) - y(0)$$

$$L[y''(t)] = s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0)$$

لا يمكننا استخدام تحويلات لابلاس في حل المعادلات التفاضلية إلا إذا كانت مرفقة بشروط ابتدائية تذكر في نص السؤال.

تمرين 1 : حل المعادلة التالية باستخدام تحويلات لابلاس.

$y'' - 5y' + 6y = 1 \quad : \quad y(0) = y'(0) = 0 \text{ و } t > 0$

الحل :

① $L[y'' - 5y' + 6y] = L[1]$

$L[y''] - 5L[y'] + 6L[y] = L[1]$

نعوض :

$s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) - 5\,s\,Y(s) - 5\,y(0) + 6\,Y(s) = \frac{1}{s}$

نعوض بشروط الابتدائية :

$s^2 Y(s) - 5\,s\,Y(s) + 6\,Y(s) = \frac{1}{s}$

نخرج $Y(s)$ عامل مشترك

$Y(s)[s^2 - 5s + 6] = \frac{1}{s}$

$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s(s-3)(s-2)}$

* لا يوجد قاعدة تعطينا تحويل لابلاس العكسي لهذه الدالة. لذا نفرق الكسور لتبسيط الدالة ثم نوجد تحويل لابلاس العكسي للدالة الجديدة.

$Y(s) = \frac{1}{s(s-3)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}$

الآن نوجد A, B, C عن طريقه توحيد المقامات والمطابقة

$$\frac{1}{S(S-2)(S-3)} = \frac{A(S-2)(S-3)}{S(S-2)(S-3)} + \frac{BS(S-3)}{S(S-2)(S-3)} + \frac{CS(S-2)}{S(S-2)(S-3)}$$

$$\frac{1}{S(S-2)(S-3)} = \frac{AS^2 - 5AS + 6A + BS^2 - 3BS + CS^2 - 2CS}{S(S-2)(S-3)}$$

$$1 = (A+B+C)S^2 - (5A+3B+2C)S + 6A$$

بالمطابقة:

$A + B + C = 0$ ...... ① إيجاد ثوابت في الامتحان مطلوب

$5A + 3B + 2C = 0$ ..... ②

$6A = 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{6}}$

نعوض A في ① و ② فنحصل على معادلتين:

$\frac{1}{6} + B + C = 0$ ..... $\frac{5}{6} + 3B + 2C = 0$

$\Rightarrow B + C = -\frac{1}{6}$ ..... * $3B + 2C = -\frac{5}{6}$

نضرب * ب -2

$\Rightarrow -2B - 2C = \frac{2}{6}$ ... ③ و $3B + 2C = -\frac{5}{6}$ ... ④

نجمع ③ و ④

$\Rightarrow B + 0 = -\frac{3}{6} \Rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{2}}$ و $\boxed{C = \frac{1}{3}}$

نعوض A و B و C في $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{6}}{s} + \frac{-\frac{1}{2}}{s-2} + \frac{\frac{1}{3}}{s-3}$$

$$L^{-1}[Y(s)] = y(t) = \frac{1}{6} L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{2} L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] + \frac{1}{3} L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]$$

$$y(t) = \boxed{\frac{1}{6} - \frac{1}{2} e^{2t} + \frac{1}{3} e^{3t}}$$

حيث توجد تحويلات لابلاس العكسية من المحاضرة السابقة التي نكون قد قمنا بحفظها.

تمرين 2: حل المعادلة التالية باستخدام تحويلات لابلاس:

$y'' + y = e^t \quad ; \; y(0) = 0 \; , \; y'(0) = 2 \; , \; t > 0$

الحل:

$$L[y'' + y] = L[e^t]$$

$$L[y''] + L[y] = L[e^t]$$

$$s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

نعوض الشروط الابتدائية

$$s^2 Y(s) - 2 + Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

نخرج $Y(s)$ عامل مشترك

$$Y(s)\,(s^2+1) = \frac{1}{s-1} + 2$$

$$\Rightarrow Y(s)\,(s^2+1) = \frac{1+2s-2}{s-1} = \frac{2s-1}{s-1}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2s-1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

نوحد المقامات:

$$\frac{2s-1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A(s^2+1)}{(s-1)(s^2+1)} + \frac{(Bs+C)(s-1)}{(s^2+1)(s-1)}$$

$$\frac{2s-1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{As^2+A+Bs^2-Bs+Cs-C}{(s-1)(s^2+1)}$$

نطابق:

الحد الثابت:

امثال s

امثال s^2

$A - C = -1$ .... ①

$C - B = 2$ .... ②

$A + B = 0$ .... ③

من ③ $A = -B$ نعوض في ①

$-B - C = -1$, $-B + C = 2$

نطرح المعادلتين

$$0 - 2C = -3 \Rightarrow C = \frac{3}{2} \quad , \quad B = -\frac{1}{2} \quad , \quad A = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{-\frac{1}{2}s + \frac{3}{2}}{s^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{s^2+1}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] + \frac{3}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{3}{2}\sin(t)}$$

تمرين 3 : حل المعادلة التالية باستخدام تحويلات لابلاس:

$$y'' - 2y' + y = 4 \quad ; \quad y(0) = 4 \ , \ y'(0) = 2 \ , \ t > 0$$

الحل :

$$L[y'' - 2y' + y] = L[4]$$

$$L[y''] - 2L[y'] + L[y] = L[4]$$

$$s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) - 2[sY(s) - y(0)] + Y(s) = \frac{4}{s}$$

نعوض بشروط الابتدائية :

$$s^2 Y(s) - 4s - 2 - 2sY(s) + 8 + Y(s) = \frac{4}{s}$$

$$Y(s)\cdot(s^2 - 2s + 1) - 4s + 6 = \frac{4}{s}$$

/ /

$$Y(s)(s-1)^2 = 4s^2 - 6 + \frac{4}{s} = \frac{4s^2-6s+4}{s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{4s^2-6s+4}{s(s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

توحيد المقامات:

$$\frac{4s^2-6s+4}{s(s-1)^2} = \frac{A(s-1)^2}{s(s-1)^2} + \frac{B\cdot s\cdot(s-1)}{s(s-1)^2} + \frac{C.s}{(s-1)^2}$$

$$\frac{4s^2-6s+4}{s(s-1)^2} = \frac{s^2(A+B)+s(-2A-B+C)+A}{s(s-1)^2}$$

تطابق:

$$A+B=4$$
$$-2A-B+C=-6$$
$$A=4 \Rightarrow B=0 \quad , C=2$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{4}{s} + 0 + \frac{2}{(s-1)^2}$$

نجري تحويل لابلاس عكسي:

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = 4L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + 2L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]$$

$$\boxed{y(t) = 4 + 2te^t}$$

تمرين 4 : حل المعادلة التالية باستخدام تحويلات لابلاس:

$y'' + y' = te^t \quad : y(0) = y'(0) = 0 \quad , t > 0$

الحل:

$L[y''] + L[y'] = L[te^t]$

$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + sY(s) - y(0) = \frac{1}{(s-1)^2}$

نعوض القيم الابتدائية:

$s^2 Y(s) + sY(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$

$Y(s)(s^2 + s) = \frac{1}{(s-1)^2}$

$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s(s+1)(s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{(s-1)^2}$

بتوحيد المقامات والمطابقة نجد: $A = 1, B = -\frac{1}{4}, C = -\frac{3}{4}, D = \frac{1}{2}$

نعوض: $Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{-\frac{1}{4}}{s+1} + \frac{-\frac{3}{4}}{s-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(s-1)^2}$

$\Rightarrow y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[\frac{1}{s}] - \frac{1}{4}L^{-1}[\frac{1}{s+1}] - \frac{3}{4}L^{-1}[\frac{1}{s-1}]$

$+ \frac{1}{2}L^{-1}[\frac{1}{(s-1)^2}]$

$$\boxed{y(t) = 1 + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{3}{4}e^{t} + \frac{1}{2}te^{t}}$$

Galaxy

تمرين 5 : حل المعادلة الآتية باستخدام تحويلات لابلاس:

$$y'' + 2y' + y = e^{-2t} \; : \; y(0) = y'(0) = 0 \quad t > 0$$

الحل:

$$L[y''] + 2L[y'] + L[y] = L[e^{-2t}]$$

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + 2sY(s) - 2y(0) + Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

نعوض القيم الابتدائية:

$$s^2 Y(s) + 2s\,Y(s) + Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$Y(s) \cdot (s^2 + 2s + 1) = \frac{1}{s+2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

نتوصل لقيم الثوابت بالطابقة:

$A = 1$, $B = -1$, $C = 1$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = e^{-2t} - e^{-t} + t\,e^{-t}}$$

Galaxy

تمرين 6: حل المعادلة باستخدام تحويلات لابلاس.

$$y'' - 5y' + 6y = 1 \quad : y(0) = y'(0) = 0 \ , \ t > 0$$

الحل:

$$L[y''] - 5L[y'] + 6L[y] = L[1]$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 5sY(s) - 5y(0) + 6Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$s^2 Y(s) - 5sY(s) + 6Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s)(s^2 - 5s + 6) = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}$$

بتوحيد المقامات والمطابقة:

$$A = \frac{1}{6} \ , \ B = -\frac{1}{2} \ , \ C = \frac{1}{3}$$

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{6}}{s} - \frac{\frac{1}{2}}{s-2} + \frac{\frac{1}{3}}{s-3}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{6}L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] + \frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{3t}}$$

Syria math - 2nd year

إعداد: نارمين خلّو + آية سيفي

٢٠١٩ / ٣ / ٢٤ المحاضرة التاسعة تفاضلية 2 د. ملك سار دينى

عنوان المحاضرة:

المعادلات التفاضلية الجزئية:

* المشتق الجزئي:

اذا كانت $z = z(x,y)$ فإنه:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x+\Delta x, y) - z(x,y)}{\Delta x}$$

يدعى المشتق الجزئي للدالة z من المرتبة الأولى بالنسبة للمتغير x باعتبار أن y ثابت.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(x, y+\Delta y) - z(x,y)}{\Delta y}$$

يدعى المشتق الجزئي للدالة z من المرتبة الأولى بالنسبة للمتغير y باعتبار أن x ثابت.

* التفاضل الكلي:

1. يعطى التفاضل الكلي للسطح $F(x,y,z) = 0$ بالعلاقة:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0$$

ويمكنه تعميم التفاضل الكلي للسطح الذي يتعلق بـ n متغير
$F(x_1, x_2, x_3 \cdots x_n) = 0$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n = 0$$

Galaxy

/ /

2 - يعطى التفاضل الكلي للدالة $Z = Z(x,y)$ بالعلاقة:

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy$$

3 - يعطى التفاضل الكلي للدالة $Z = Z(x,y)$ حيث:
$y = y(t)$ و $x = x(t)$ بالعلاقة:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

4 - يعطى التفاضل الكلي للدالة $Z = Z(x,y)$ حيث:
$y = y(t_1, t_2)$ و $x = x(t_1, t_2)$ بالعلاقة:

$$\frac{\partial Z}{\partial t_1} = \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_1}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t_2} = \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_2}$$

5 - يعطى التفاضل الكلي للدالة الضمنية $F(x,y) = 0$ حيث
$y = y(x)$ بالعلاقة:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} dx = -\frac{\partial F}{\partial y} dy$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}}$$ نقسم على dx

6 - بعض التفاضل الكلي للدالة $F(x,y,z)=0$ حيث
بالعلاقة $z=z(x,y)$

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0$$

لكن لدينا:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=0$$

نعوض من dz في dF :

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=0$$

$$=\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy=0$$

$\Rightarrow$ إما $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}}$$

أو $\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}}$$

/ /

ملاحظات: * عندما نكتب d أي تفاضل كلي

* عندما نكتب ∂ أي تفاضل جزئي

وهنالك فرق كبير وهم بينهم .

* عندما تكون الدالة التفاضلية تابعة لمتغير واحد عندئذ تفاضلها تفاضل كلي .

* وعندما تكون تابعة لمتغيرين تفاضلها تفاضل جزئي .

* مثلاً في رقم 2 كانت z تابعة لمتغيرين x و y تفاضلناها جزئياً بالنسبة لـ x و بالنسبة لـ y .

* وبعدين x و y كتبنا dx و dy تفاضل كلي .

* في رقم 3 كانت z تابعة لمتغيرين x و y وأيضاً x و y كل منهما تابع لمتغيرين t_1 و t_2 لذلك كتبنا $\frac{\partial x}{\partial t_1}$, $\frac{\partial x}{\partial t_2}$ ـــ وهكذا أي تفاضل جزئي

تعاريف :

* المعادلة التفاضلية الجزئية :

تسمى كل معادلة تفاضلية تحتوي على مشتق جزئي واحد على الأقل بمعادلة تفاضلية جزئية ويرمز لها (م . ت . ج)

* الحل التام : هو الحل الذي يحتوي على عدد من الدوال المستقلة الاختيارية وعددها يساوي رتبة المعادلة التفاضلية "" عدد المتغيرات ""

* الحل الخاص: هو الحل الذي ينتج عن الحل العام بإعطاء الثوابت قيم عددية

* الحل الشاذ: هو الحل الذي لا ينتج عن الحل العام بإعطاء الثوابت قيم عددية.

* نقول عن الدالة $u(x,y)$ أنها حل للمعادلة التفاضلية الجزئية إذا تحولت المعادلة التفاضلية بعد التعويض إلى متطابقة.

ملاحظة:

* إن كل حل للمعادلة التفاضلية يمثل سطحاً" ندعوه بالسطح التكاملي للمعادلة أي أن حل المعادلة التفاضلية هو إيجاد مجموعة السطوح التكاملية لها

* لنكن لدينا $Z = Z(x,y)$:

فالمعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى تكون بالشكل:

$G_1(x, y, z, p, q)$

والمعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية تكون بالشكل:

$G_2(x, y, z, p, q, r, s, t)$

حيث الرموز الدولية:

((مهمة))

$p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$

$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

Scanned by CamScanner

/ /

منشأ المعادلات التفاضلية الجزئية:

* إنه حذف الوسطاء الاختيارية من معادلة جبرية لعدة متغيرات يقود إلى المعادلة التفاضلية الجزئية.
وهذه الوسطاء إما أن تكون ثوابت كيفية أو دوال اختيارية.

أولاً: إذا كانت الوسطاء ثوابت كيفية:

1 - العلاقة الجبرية تحتوي على ثابت اختياري واحد: $F(x, y, z, c) = 0$ عندئذٍ نتبع الخطوات:

① نشتق بالنسبة لـ x فنحصل على:

$$G_1(x, y, z, p) = 0$$

② نشتق بالنسبة لـ y فنحصل على:

$$G_2(x, y, z, q) = 0$$

③ نحذف الثابت من المعادلتين فنحصل على المعادلة التفاضلية الجزئية.

مثال: أوجد المعادلة التفاضلية الجزئية للعلاقة الجبرية التالية:

$$z = c\,x\,y$$

الحل: نجد أنه تحوي ثابت واحد هو c

- نشتق بالنسبة لـ x بحيث يكون y ثابت

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = c y \Rightarrow c = \frac{p}{y}$$

$$\Rightarrow z = \frac{p}{y} x . y \Rightarrow z = p . x = G_1$$

- نشتق بالنسبة لـ y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q = c x \Rightarrow c = \frac{q}{x}$$

$$\Rightarrow z = \frac{q}{x} x . y \Rightarrow z = q . y = G_2$$

Galaxy

أصبح لدينا:

$$c = \frac{q}{x} = \frac{p}{y} \Rightarrow px = qy \Rightarrow xp - yq = 0$$

وهي المعادلة التفاضلية الجزئية المطلوبة

2- العلاقة الجبرية تحتوي على ثابتين اختياريين: $F(x, y, z, c_1, c_2) = 0$ عندئذٍ نتبع الخطوات:

① نشتق بالنسبة لـ x:

$$G_1(x, y, z, p) = 0$$

② نشتق بالنسبة لـ y:

$$G_2(x, y, z, q) = 0$$

③ نحذف الثابتين من المعادلات الثلاث فنحصل على المعادلة التفاضلية الجزئية

مثال: أوجد المعادلة التفاضلية الجزئية من العلاقة الجبرية:

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + z^2 = 1$$

الحل: نجد أنها تحوي ثابتين c_1 و c_2.

- نشتق بالنسبة لـ x بحيث y ثابت:

$$2(x - c_1) + 0 + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow 2(x - c_1) = -2zp \Rightarrow x - c_1 = -pz$$

نشتق بالنسبة لـ y بحيث x ثابت:

$$0 + 2(y - c_2) + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow 2(y - c_2) = -2zq \Rightarrow y - c_2 = -qz$$

نعوض في العلاقة الجبرية:

$$(-p z)^2 + (-q z)^2 + z^2 = 1$$

$$\Rightarrow p^2 z^2 + q^2 z^2 + z^2 = 1$$

$$\Rightarrow z^2 (p^2 + q^2 + 1) = 1$$

وهي المعادلة التفاضلية الجزئية المطلوبة.

ثانياً: إذا كانت الوسطاء دوال اختيارية:

1. العلاقة الجبرية تحتوي على دالة اختيارية واحدة تتعلق بدالة معلومة من الشكل: $F(x, y, z, g(u(x,y,z)))$ حيث $z = z(x,y)$ و g دالة اختيارية و F, u دوال معلومة عندئذ نتبع الخطوات:

1. نشتق بالنسبة لـ x
2. نشتق بالنسبة لـ y
3. نحذف الدالة من المعادلات الثلاث.

مثال: أوجد المعادلة التفاضلية الجزئية من العلاقة الجبرية:

$$x^2 + y^2 + z^2 = g(2x + y)$$

الحل: إن $u = 2x + y \Leftarrow g = g(u)$

نشتق بالنسبة لـ x حيث y ثابت

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 2g' \Rightarrow x + zp = g' \quad \text{---} (1)$$

حيث:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \underbrace{\frac{dg}{du}}_{g'} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{2} = 2g'$$

/ /

نشتق بالنسبة لـ y بحيث x ثابتة:

$2y + 2zq = \phi'$ ... ②

حيث $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{d\phi}{du} \cdot \frac{du}{\partial y} = 1 \cdot \phi'$

من ① و ②:

$\phi' = x + pz = 2y + 2qz \Rightarrow x - 2y - (p - 2q)z = 0$

وهي المعادلة المطلوبة.

2 - العلاقة الجبرية تحتوي على دالتين اختياريتين وهما متعلقة بدالة معلومة من الشكل:

$Z = f[u(x,y,z)] + g[v(x,y,z)]$

① نشتق بالنسبة لـ x مرتين.

② نشتق بالنسبة لـ y مرتين.

③ نحذف الدالتين g و f فنحصل على المعادلة التفاضلية الجزئية

مثال: اوجد المعادلة التفاضلية الجزئية من العلاقة الجبرية:

$Z = f(x + cy) + g(x - cy)$

الحل: ان $z = f(u) + g(v)$: $u = x + cy$, $v = x - cy$

نشتق مرة اولى بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(v)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow P = \frac{df}{du}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dg}{dv}\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow P = f'(u)\,.\,1 + g'(v)\,.\,1$$

فاضلنا f بالنسبة u تفاضل كلي لأن f تحوي متغير واحد فقط وهو u

فاضلنا u بالنسبة لـ x تفاضل جزئي لأن u تحوي متغيرين x و y

وكذلك بالنسبة لـ g و v.

- نشتق مرة ثانية بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r = f''(u) + g''(v) \quad \text{---} \; (1)$$

- هنشتق مرة أولى بالنسبة لـ y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(u)}{\partial y} + \frac{\partial g(v)}{\partial y}$$

$$q = \frac{df}{du}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dg}{du}\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$q = f'(u)\,.\,c - g'(v)\,c$$

- نشتق مرة ثانية بالنسبة لـ y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t = c^2 f''(u) + c^2 g''(v) \quad \text{---} \; (2)$$

من ① و ② نجد :

$$t = c^2 r \Rightarrow \frac{1}{c^2} t$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

وهي المعادلة التفاضلية الجزئية المطلوبة .

Syriamath _ 2nd Year.   إعداد: نارليمان حلو . آية بسبعي

٢٠ / ٣ / ٢٠١٩م — المحاضرة العاشرة تفاضلية 2 — د. ملك ماوردي.

عنوان المحاضرة:

- المغلف.
- حل مسألة الشروط الابتدائية للمعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام تحويلات لابلاس.

---

* المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى هي من الشكل:

$F(x, y, z, p, q) = 0$ ... ①

الحل التام للمعادلة ① هو حل يحوي على عدد من الثوابت الاختيارية يساوي عدد المتغيرات المستقلة من الشكل:

$f(x, y, z, c_1, c_2)$ ... ②

وهو يمثل عدد من الأسطح التكاملية للمعادلة ① والتي تختلف فيما بينها بقيم الثوابت c_1, c_2

---

* المغلف:

هو ذلك المنحني الذي يمس في كل نقطة من نقاطه أحد السطوح التكاملية

---

* الحل الشاذ:

نفرض أن المعادلة ② هي الحل التام للمعادلة ① عندئذٍ إذا كان هنالك مغلفاً لهذه السطوح معادلته تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية ① عندها نسمي معادلة المغلف هذا ((إن وجد)) بالحل الشاذ للمعادلة التفاضلية الجزئية ①

★ طريقة إيجاد المغلف ((الحل الشاذ)):

① نشتق الحل التام بالنسبة للثوابت.

② نحذف الثوابت من العلاقات الناتجة ومن الحل التام.

③ نسمي السطوح الناتجة التي تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية بالحل الشاذ لهذه المعادلة.

مثال: أوجد المغلفات أو الحلول الشاذة للمعادلة التفاضلية الجزئية ((إن وجدت)):

$Z = px + qy - p^2 - q^2$ .... ①

علماً: حيث أن الحل التام هو

$z = ax + by - a^2 - b^2$ ..... ②

الحل: نلاحظ وجود ثابتين a و b.

① نشتق بالنسبة للثوابت:

- أولاً نشتق بالنسبة لـ a: ((الحل التام))

$$0 = x - 2a \Rightarrow a = \frac{x}{2}$$

- ثانياً نشتق بالنسبة لـ b

$$0 = y - 2b \Rightarrow b = \frac{y}{2}$$

② نعوض قيمة a و b في الحل التام ((لحذف الثوابت a و b))

$$Z = ax + by - a^2 - b^2$$

$$= \frac{x}{2}x + \frac{y}{2}y - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}$$

$$Z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} \quad \text{.....} ③$$

الآن اذا حقق هذا الحل المعادلة ① نقول أنه الحل الشاذ ...

اولاً نوجد q و p من المعادلة ③

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = \frac{x}{2} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q = \frac{y}{2}$$

نعوض p و q في ①

$$Z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = \text{المعادلة ③}$$

اذاً حصلنا على مطابقة وبالتالي $Z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$ هو الحل الشاذ.

---

* حل مسائل الشروط الابتدائية للمعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام تحويلات لابلاس:

لتكن لدينا الدالة $Z = Z(x,t)$ تابعة لمتغيرين t و x فإننا نسمي:

$$\frac{\partial z}{\partial t} , \frac{\partial z}{\partial x} , \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} , \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

بالمشتقات الجزئية للدالة Z بالنسبة لـ t و x "من المرتبة الأولى والثانية"

---

* للحل نعتمد على الخواص التالية:

① فاصية المفاضلة الجزئية من المرتبة الأولى بالنسبة لـ t:

$$L\left[\frac{\partial z}{\partial t}\right] = S Z(x,s) - Z(x,0)$$

② خاصية المفاضلة الجزئية من المرتبة الثانية بالنسبة لـ t :

$$L\left[\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}\right] = S^2 Z(x,s) - S\,z(x,0) - \frac{\partial z(x,0)}{\partial t}$$

③ خاصية المفاضلة الجزئية من المرتبة الأولى بالنسبة لـ x :

$$L\left[\frac{\partial Z}{\partial x}\right] = \frac{\partial Z(x,s)}{\partial x} = Z'(x,s)$$

④ خاصية المفاضلة الجزئية من المرتبة الثانية بالنسبة لـ x :

$$L\left[\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^2 Z(x,s)}{\partial x^2} = Z''(x,s)$$

مثال: حل مسألة الشروط الابتدائية للمعادلة التفاضلية الجزئية التالية باستخدام تحويلات لابلاس:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + x\frac{\partial Z}{\partial x} = x$$

حيث $x > 0 \,,\, t > 0$ ، $z(x,0) = 0$

$z(0,t) = 0$

الحل: نأخذ تحويل لابلاس بالنسبة لـ t للطرفين: (x ثابت)

$$L\left[\frac{\partial Z}{\partial t}\right] + xL\left[\frac{\partial Z}{\partial x}\right] = xL[1]$$

$$\Rightarrow S\,Z(x,s) - z(x,0) + x\,Z'(x,s) = \frac{x}{S}$$

نعوض شروط البدء :

$$\Rightarrow s\,Z(x,s) + x\,Z'(x,s) = \frac{x}{s}$$

نقسم الطرفين على x

$$\Rightarrow \frac{s}{x} Z(x,s) + Z'(x,s) = \frac{1}{s}$$

$$Z'(x,s) + \frac{s}{x} Z(x,s) = \frac{1}{s}$$

وهي عبارة عن معادلة تفاضلية عادية من الشكل

$$Z' + PZ = q \quad : P = \frac{s}{x} \,,\; q = \frac{1}{s}$$

ونعلم أن حلها العام من الشكل: ((في التفاضلية 1)) ((حفظ ما شرة)) :

$$Z = e^{-\int P\,dx}\left[\int e^{\int P\,dx} \cdot q\,dx + c\right]$$

$$= e^{-s\int \frac{1}{x}dx}\left[\int e^{s\int \frac{1}{x}dx} \cdot \frac{1}{s}\,dx + c\right]$$

$$= e^{-s\ln x}\left[\int e^{s\ln x} \cdot \frac{1}{s}\,dx + c\right]$$

$$= e^{\ln x^{-s}}\left[\int e^{\ln x^{s}} \cdot \frac{1}{s}\,dx + c\right]$$

$$= x^{-s}\left[\frac{x^{s+1}}{s(s+1)} + c\right]$$

$$\Rightarrow Z(x,s) = \frac{x}{s(s+1)} + \frac{c}{x^{s}} \quad \text{-----} \; (1)$$

Galaxy

الآن لمعرفة قيمة الثابت C نستخدم الشرط الابتدائي الثاني

$3(0,t)=0$ حيث لدينا: (عندما $x=0$)

$$Z(0,s)=\int_0^{\infty} 3(0,t)\, e^{-st}\, dt = 0$$

$$\Rightarrow Z(0,s)=0$$

نعوض في المعادلة (1)

$$Z(0,s)=0=\frac{0}{s(s+1)}+\frac{C}{x^s} \Rightarrow C=0$$

لم نأخذ x^s في المقام $=0$ نظراً صغيرة جداً وتعطينا عدم تعريف

$$\Rightarrow Z(x,s)=\frac{x}{s(s+1)}$$

الآن نغرق المحور ونأخذ تحويل لابلاس العكسي بالنسبة لـ t ويكفيه كون x ثابت بالنسبة لـ t يكون:

$$L^{-1}[Z(x,s)]=xL^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]=xL^{-1}\left[\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}\right]$$

نوجد A و B

$$\frac{1}{s(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}=\frac{A(s+1)}{s(s+1)}+\frac{sB}{s(s+1)}$$

$$\Rightarrow 1=As+A+sB=A+(A+B)s$$

بالمطابقة:

$A = 1$ ، $A + B = 0 \Rightarrow -A = B \Rightarrow B = -1$

نعوض

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$x L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = x L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - x L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]$$

$$L^{-1}[Z(x,s)] = x(1 - e^{-t})$$

مثال: حل مسألة الشروط الابتدائية للمعادلة التفاضلية الجزئية التالية باستخدام تحويلات لابلاس:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - k \sin \pi x$$

حيث: $t > 0 , c > 0$

$$z(x,0) = z'(x,0) = 0$$
$$z(0,t) = z(1,t) = 0$$

الحل: نأخذ تحويل لابلاس بالنسبة لـ t بالطرفين:

$$L\left[\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right] = \frac{1}{c^2} L\left[\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}\right] - k \sin \pi x \, L[1]$$

$$Z''(x,s) = \frac{1}{c^2}\left[s^2 Z(x,s) - s\, z(x,0) - \frac{\partial z(x,0)}{\partial t}\right] - k \sin \pi x . \frac{1}{s}$$

Galaxy

/ /

نعوض الشروط الابتدائية :

$$Z''(x,s) = \frac{s^2}{c^2} Z(x,s) - \frac{k}{s} \sin \pi x$$

$$Z''(x,s) - \frac{s^2}{c^2} Z(x,s) = -\frac{k}{s} \sin \pi x \quad --- *$$

نوجد حل المعادلة المتجانسة بدون طرف ثاني :

$$Z'' - \frac{s^2}{c^2} Z' = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \frac{s^2}{c^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{s}{c} , \quad \lambda_2 = -\frac{s}{c}$$

الحل العام من الشكل : ccp

$$Z_1 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$Z_1 = C_1 e^{\frac{s}{c} x} + C_2 e^{-\frac{s}{c} x}$$

نبحث عن حل خاص من الشكل :

$$Z_2 = A \sin \pi x$$

نشتق مرتين

$$Z_2' = A\pi \cos \pi x$$

$$Z_2'' = -A\pi^2 \sin \pi x$$

نعوض في *

$$-A\pi^2 \sin \pi x - \frac{s^2}{c^2} A \sin \pi x = -\frac{k}{s} \sin \pi x$$

$$-A\left(\pi^2 + \frac{s^2}{c^2}\right) \sin \pi x = -\frac{k}{s} \sin \pi x$$

$$\Rightarrow A = \frac{kc^2}{s(s^2+\pi^2c^2)}$$

ومنه يصبح الحل الخاص:

$$Z_2 = \frac{kc^2}{s(s^2+\pi^2c^2)} \sin \pi x$$

ومنه الحل العام:

$$Z = Z_1 + Z_2$$

$$= C_1 e^{\frac{s}{c}x} + C_2 e^{-\frac{s}{c}x} + \frac{kc^2}{s(s^2+\pi^2c^2)} \sin \pi x$$

- الآن للحصول على الثوابت C_1 و C_2 من الشرط الثاني في نزوح البدء $\boxed{z(0,t) = 0}$ عندما $x=0$

$$Z(0,s) = \int_0^\infty z(0,t)\, e^{-st}\, dt = 0 \Rightarrow Z(0,s) = 0$$

نعوض في Z_1

$$Z(0,s) = 0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -C_2$$

/ /

ومن الشرط الآخر $\boxed{\mathfrak{Z}(1,t) = 0}$ عندما $x = 1$

$$Z(1,s) = \int_0^\infty \mathfrak{Z}(1,t)\, e^{-st}\, dt = 0 \Rightarrow Z(1,s) = 0$$

نعوض في Z_1 ميثه $C_1 = C_2$ $\Rightarrow$

$$Z(1,s) = C_1 e^{\frac{s}{c}} - C_1 e^{-\frac{s}{c}} = C_1 \left[e^{\frac{s}{c}} - e^{-\frac{s}{c}} \right] = 0$$

وبما أن $s > 0$ و $c > 0$ عندها يكون $C_1 = 0$

ومنه $C_1 = C_2 = 0$

نعوض في Z

$$Z = \frac{KC^2}{s(s^2 + \pi^2 C^2)} \sin \pi x$$

نفرق الكسور.

$$\frac{1}{s(s^2 + \pi^2 C^2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + D}{s^2 + \pi^2 C^2}$$

$$= \frac{A(s^2 + \pi^2 C^2) + s(Bs + D)}{s(s^2 + \pi^2 C^2)}$$

$$\Rightarrow 1 = As^2 + A\pi^2 C^2 + Bs^2 + sD$$

$$1 = A\pi^2 C^2 + (A + B)s^2 + sD$$

بالمطابقة:

$$A\pi^2 C^2 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\pi^2 C^2}$$

$$A + B = 0 \Rightarrow -A = B \Rightarrow B = -\frac{1}{C^2\pi^2}$$

$$D = 0$$

نعوض:

$$Z(x,s) = kC^2\left[\frac{\frac{1}{\pi^2 C^2}}{s} + \frac{-\frac{s}{\pi^2 C^2}}{s^2+\pi^2C^2}\right]\sin \pi x$$

$$= \left(\frac{k}{\pi^2 s} + \frac{ks}{\pi^2(s^2+\pi^2C^2)}\right)\sin \pi x$$

ومنه بالتحويل العكسي

$$L^{-1}[Z(x,s)] = Z(x,t)$$

$$= \left(\frac{k}{\pi^2}L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \frac{k}{\pi^2}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\pi^2C^2}\right]\right)\sin \pi x$$

$$= \left(\frac{k}{\pi^2} - \frac{k}{\pi^2}\cos \pi C t\right)\sin \pi x$$

٣١ / ٣ / ٢٠١٩ المحاضرة الحادية عشرة تفاضلية 2 د. ملك ماروني

عنوان المحاضرة:

* المعادلات التفاضلية الجزئية التي تعالج كمعادلات تفاضلية عادية
- مسألة القيم الابتدائية.
- مسألة القيم الحدية.
* المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى غير المتجانسة
* السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية المار بمنحني معلوم.

تمرين محلول:

حل مسألة الشروط الابتدائية للمعادلة التفاضلية الجزئية التالية باستخدام تحويلات لابلاس.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad ; \quad z(0,t) = z(3,t) = 0 \quad ; t>0$$

$$z(x,0) = 10\sin 2\pi x - 6\sin 4x$$

الحل:

نأخذ تحويل لابلاس بالنسبة للمتغير t

$$sZ(x,s) - z(x,0) = 4\frac{d^2Z}{dx^2} = 4Z''$$

$$4Z'' - sZ = -z(x,0) = -10\sin 2\pi x + 6\sin 4x \quad *$$

نوجد الحل العام بدون طرف ثاني

$$4Z'' - sZ = 0 \Rightarrow 4\lambda^2 - s = 0 \Rightarrow \lambda = \mp\frac{\sqrt{s}}{2}$$

ويكون الحل العام من الشكل:

$$Z_1 = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$= c_1 e^{\frac{\sqrt{s}}{2}x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{s}}{2}x}$$

نبحث عن حل خاص من الشكل

$$Z_2 = A \sin 2\pi x + B \sin 4\pi x$$

نشتق مرتين:

$$Z'_2 = 2\pi A \cos 2\pi x + 4\pi B \cos 4\pi x$$

$$Z''_2 = -4\pi^2 A \sin 2\pi x - 16\pi^2 B \sin 4\pi x$$

نعوض في *

$$4[-4\pi^2 A \sin 2\pi x - 16\pi^2 B \sin 4\pi x]$$
$$-5[A \sin 2\pi x + B \sin 4\pi x]$$
$$= -10 \sin 2\pi x + 6 \sin 4\pi x$$

$$\Rightarrow -16\pi^2 A \sin 2\pi x - 64\pi^2 B \sin 4\pi x - 5A \sin 2\pi x$$
$$-5B \sin 4\pi x = -10 \sin 2\pi x + 6 \sin 4\pi x$$

$$\Rightarrow [-16\pi^2 A - 5A] \sin 2\pi x - [64\pi^2 B + 5B] \sin 4\pi x$$
$$= -10 \sin 2\pi x + 6 \sin 4\pi x$$

بالمقارنة

$$-[16\pi^2 + 5]A = -10$$

$$\Rightarrow A = \frac{10}{16\pi^2 + 5}$$

$$[64\pi^2 + S]B = 6$$

$$\Rightarrow B = \frac{6}{64\pi^2+S}$$

$$\Rightarrow Z_2 = \frac{10}{16\pi^2+S}\sin 2\pi x + \frac{6}{64\pi^2+S}\sin 4\pi x$$

ومنه الحل العام :

$$Z = Z_1 + Z_2$$

$$= C_1 e^{\frac{\sqrt{S}}{2}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{S}}{2}x} + \frac{10}{16\pi^2+S}\sin 2\pi x + \frac{6}{64\pi^2+S}\sin 4\pi x$$

الآن لحساب الثوابت C_1 و C_2 من شروط البدء

$$z(0,t) = 0 \Rightarrow Z(0,S) = \int_0^\infty z(0,t)\, e^{-st}\, dt = 0$$

$$Z_1(0,S) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = 0$$

$$\Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$$

و $$z(3,t) = 0 \Rightarrow Z(3,S) = \int_0^\infty z(3,t)\, e^{-st}\, dt = 0$$

$$Z_1(0,S) = C_1 e^{3\frac{\sqrt{S}}{2}} + C_2 e^{-3\frac{\sqrt{S}}{2}} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 , C_2 = 0$$

نعوض في الحل العام :

$$Z(x,s) = \frac{10}{16\pi^2+s} \sin 2\pi x + \frac{6}{64\pi^2+s} \sin 4\pi x$$

وأخيراً نأخذ تحويله لابلاس العكسي :

$$L[Z(x,s)] = z(x,t) = 10 \sin 2\pi x\, e^{-16\pi^2 t} + 6 \sin 4\pi x\, e^{-64\pi^2 t}$$

المعادلات التفاضلية الجزئية التي تعالج كمعادلات عادية :

إذا كانت المعادلات التفاضلية الجزئية لا تحوي سوى المشتقات الجزئية بالنسبة لأحد المتغيرين، عندها يمكن اعتبار المتغير الآخر وسيطاً ثابتاً، وتكون ثوابت التكامل دوالاً تفاضلية في هذا الوسيط.

يمكن معالجة بعض المعادلات التفاضلية الجزئية بعملية تكامل بالنسبة لأحد المتغيرين أولاً ثم بعملية تكامل بالنسبة للمتغير الثاني على أن نأخذ في كل حالة ثابت تكامل هو دالة تفاضلية في المتغير الآخر. حيث :

1. $\frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow z = \varphi(y)$

2. $\frac{dz}{dy} = 0 \Rightarrow z = \varphi(x)$

3. $\frac{d^2z}{dx^2} = 0 \Rightarrow z = \varphi(y)x + \varphi_1(y)$

4. $\frac{d^2z}{dy^2} = 0 \Rightarrow z = \varphi(x)y + \varphi_1(x)$

⑤ $q = t \Rightarrow \frac{t}{q} = z = \varphi(x)\, e^{y} + \varphi_1(x)$

⑥ $p = r \Rightarrow \frac{r}{p} = z = \varphi(y)\, e^{x} + \varphi_1(y)$

* **مسألة القيمة الابتدائية:**

تحدد من خلال المعادلة التفاضلية « تحوي شروط ابتدائية تقوم بإعطاء المتغير المستقل قيمة ابتدائية »

مثال: أوجد الحل لمسألة القيم الابتدائية التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2x e^{t}$$

حيث u دالة لمتغيرين مستقلين t و x

والشرط الابتدائي

$u(0,t) = t$ و $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = e^{t}$

الحل:

نكامل بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 e^{t} + F(t)$$

حيث $F(t)$ دالة لقيمة لا تحوي x تابعة لـ t

نكامل مرة ثانية بالنسبة لـ x

$$u = \frac{x^3}{3} e^{t} + x F(t) + g(t)$$

حيث $g(t)$ دالة لمتغير لا تحوي x تابعة لـ t

لنوجد $F(t)$ و $g(t)$ من شروط البدء

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = e^{t} = 0 + F(t)$$

$$\Rightarrow F(t) = e^{t}$$

Galaxy

$u(0,t) = t = 0 + 0 + g(t)$

$\Rightarrow g(t) = t$

وعليه:

$$u = \frac{x^3}{3} e^t + x e^t + t$$

* مسألة القيمة الحدية:

اذا كانت الشروط المعطاة في المسألة عند أكثر من قيمة للمتغير المستقل فإن المسألة تدعى مسألة القيمة الحدية.

مثال: أوجد الحل لمسألة القيمة الحدية التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xy \quad : u(0,y) = y^2 \ , \ u(x,1) = \sin x$$

الحل:

نكامل بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{2} y + F(y)$$

حيث $F(y)$ تابع لا يحوي x

نكامل بالنسبة لـ y

$$u = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{y^2}{2} + F_1(y) + g(x)$$

حيث $g(x)$ تابع لا يحوي y

و $F_1(y)$ أيضاً تابع جديد.

لإيجاد $g(x)$ و $F_1(x)$ من شروط البدء:

$u(0,y) = y^2 = F_1(y) + g(0)$

$\Rightarrow F_1(y) = y^2 - g(0)$

/ /

$$u(x,1) = \sin x = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2} + F_1(1) + g(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = \sin x - \frac{x^2}{4} - F_1(1)$$

لنوجد $g(0)$ نعوض $x = 0$

$$g(0) = 0 - 0 - F_1(1) \Rightarrow g(0) = -F_1(1)$$

نعوض في u:

$$u = \frac{x^2 y^2}{4} + (y^2 + F_1(1)) + \sin x - \frac{x^2}{4} - F_1(1)$$

$$\Rightarrow u = \frac{x^2 y^2}{4} + y^2 + \sin x - \frac{x^2}{4}$$

* المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى غير المتجانسة:

نقول عن المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى أنها خطية اذا كانت من الدرجة الأولى في المشتقين الجزئيين. أي من شكل:

$$P(x,y,z)\,p + Q(x,y,z)\,q = R(x,y,z)$$

وهي معادلة لاغرانج غير المتجانسة حيث:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} , \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

ونسمي: بالجملة الملحقة أو المساعدة للمعادلة التفاضلية.

ملاحظة:

الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى الخطية غير المتجانسة $Pp + Qq = R$ يعطى بالعلاقة

$F(u, v) = 0$; $u(x, y, z) = c_1$

$v(x, y, z) = c_2$

اي يكون الحل من الشكل: $F(c_1, c_2) = 0$ حيث c_1, c_2 تكاملان أوليان للجملة المساعدة.

تمرين: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

أو: أوجد السطوح التكاملية للمعادلة التفاضلية:

$$xp + yq = z$$

الحل:

نجد أن $P(x, y, z) = x$ و $Q(x, y, z) = y$ و $R(x, y, z) = z$

وهي معادلة تفاضلية جزئية خطية من المرتبة الأولى

الحل العام لها يعطى بالعلاقة $F(u, v) = 0$

حيث $u = c_1$ و $v = c_2$ وهما تكاملان أوليان للجملة المرافقة

$$\underset{(1)}{\frac{dx}{x}} = \underset{(2)}{\frac{dy}{y}} = \underset{(3)}{\frac{dz}{z}}$$

من (1) و (2)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \xrightarrow{\text{تكامل}} \ln x = \ln y + \ln c_1$$

$\Rightarrow \ln x = \ln(y\,C_1) \Rightarrow x = y\,C_1 \Rightarrow C_1 = \dfrac{x}{y}$

وهو التكامل الأول الأول.

من ② و ③

$\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z} \xrightarrow{\text{بالتكامل}} \ln y = \ln z + \ln C_2$

$\Rightarrow \ln y = \ln(z\,C_2) \Rightarrow y = z\,C_2 \Rightarrow C_2 = \dfrac{y}{z}$

وهو التكامل الأول الثاني.

ومنه يكون الحل العام:

$F(u,v) = F(C_1, C_2) = F\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}\right) = 0$

وهو السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية.

* السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية المار بمنحنى معلوم

اذا كان $u = C_1$, $v = C_2$ حل عام للجملة الملحقة فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى وغير المتجانسة هو $F(u,v) = 0$ والمطلوب تعيين الدالة F للحصول على سطح تكاملي المار بمنحنى معلوم (٣). وليكن المعادلات الوسيطية للمنحنى هي $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ وبما أن السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية يتولد بمنحنيات تكاملية للجملة الملحقة عندها يكون السطح محققاً لـ:

$u(x(t), y(t), z(t)) = C_1 \quad , \quad v(x(t), y(t), z(t)) = C_2$

وبحذف t من المعادلتين نحصل على الدالة F التي تربط بين C_1 و C_2 وهي $F(C_1, C_2) = 0$ أي تربط بين u, v الموافقة لسطح التكامل المطلوب.

مثال: أوجد السطح التكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية التالية: $(2x - y - z)p + (2y - z - x)q = 2z - x - y$ المار بالمنحني $x = 0$ و $y = c$.

الحل:

أولاً نوجد السطوح التكاملية كما في المثال السابق ثم نوجد السطح التكاملي المار بالمنحني.

- معادلة تفاضلية جزئية خطية من المرتبة الأولى حلها هو $F(u, v) = 0$ حيث $u = C_1$ و $v = C_2$

الجملة المميزة:

$$\frac{dx}{2x - y - z} = \frac{dy}{2y - z - x} = \frac{dz}{2z - x - y}$$

① ② ③

بجمع النسب الثلاث:

$$\frac{dx + dy + dz}{2x - y - z + 2y - z - x + 2z - x - y} = \frac{dx + dy + dz}{0}$$

$$\Rightarrow dx + dy + dz = 0$$

بالمكاملة : $x + y + z = C_1 = u$

- نطرح ② من ① وطرح ③ من ② نجد :

$$\frac{dx - dy}{2x - y - z - 2y + z + x} = \frac{dy - dz}{2y - z - x - 2z + x + y}$$

$$\Rightarrow \frac{dx - dy}{3x - 3y} = \frac{dy - dz}{3y - 3z}$$

$$\Rightarrow \frac{d(x-y)}{3(x-y)} = \frac{d(y-z)}{3(y-z)}$$ نضرب الطرفين ب 3 للتكامل نجد

بالمكاملة :

$$\ln(x-y) = \ln(y-z) + \ln C_2$$

$$\Rightarrow \ln(x-y) = \ln((y-z)C_2)$$

$$\Rightarrow x - y = (y-z)C_2 \Rightarrow C_2 = V = \frac{x-y}{y-z}$$

ومنه الحلول التكاملية للمعادلة التفاضلية

$$F(u,v) = F\left(x+y+z, \frac{x-y}{(y-z)}\right) = 0$$

ومنه السطح التكاملي المار بالمنحني Γ :
من المعادلات :

① $x = 0$ ② $y = c$

③ $c_1 = x + y + 3$ ④ $c_2 = \dfrac{x - y}{y - 3}$

نعوض ① و ② في ③ و ④

$c_1 = c + 3$ $c_2 = \dfrac{-c}{c - 3}$

$\Rightarrow 3 = c_1 - c$

و $c_2 = \dfrac{-c}{c - c_1 + c} = \dfrac{-c}{2c - c_1}$

نعوض ③ و ④ في c_2

$\Rightarrow c_2 = \dfrac{x - y}{y - 3} = \dfrac{-c}{2c - x - y - 3}$

نعوض $c = y$

$$\Rightarrow \frac{x - y}{y - 3} = \frac{-y}{2y - x - y - 3} = \frac{-y}{y - x - 3}$$

وهو السطح التكاملي المار بالمنحني.

١ / ٤ / ٢٠١٩ المحاضرة الثانية عشرة تفاضلية 2 د- ملك مارديني

عنوان المحاضرة :

السطوح التكاملية المتعامدة مع مجموعة سطوح معطاة.

أولاً سنقوم بإدراج حل عدد من التمارين بعضهم تم إعطائهم كوظائف و بعضهم قامت الدكتورة بحلهم.

الوظائف : أوجد السطوح التكاملية للمعادلات التفاضلية التالية :

تمرين (1) : $(y-z)^2 p + xzq = xy$

الحل : إنها معادلة تفاضلية جزئية خطية من المرتبة الأولى غير متجانسة.

حلها العام من الشكل $F(u,v) = F(c_1, c_2) = 0$

الجملة الملحقة لها :

$$\frac{dx}{(y-z)^2} = \frac{dy}{x\cdot z} = \frac{dz}{xy}$$

① ② ③

نأخذ ② و ③

$$\frac{dy}{x\cdot z} = \frac{dz}{x\cdot y} \Rightarrow \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} \Rightarrow y\,dy = z\,dz$$

نكامل :

$$\frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{2} + c_1' \Rightarrow c_1' = \frac{1}{2}(y^2 - z^2)$$

$$\Rightarrow 2c_1' = c_1 = y^2 - z^2 = u$$

وهو التكامل الأول الأول.

/ /

والآن نأخذ ② - ③ = ①

$$\frac{dy - dz}{x(z-y)} = \frac{dx}{(y-z)^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{d(y-z)}{x(y-z)} = \frac{dx}{(y-z)^2} \Rightarrow -\frac{d(y-z)}{x} = \frac{dx}{(y-z)}$$

$$\Rightarrow +(y-z)\,d(y-z) + x\,dx = 0$$

بالمكاملة:

$$\frac{(y-z)^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C_2'$$

$$\Rightarrow 2C_2' = C_2 = (y-z)^2 + x^2 = V$$

وهو التكامل الأول الثاني

ويكون الحل العام للسطوح التكاملية هو:

$$F(u,V) = 0 \Rightarrow F(C_1, C_2) = 0$$

$$\Rightarrow F(y^2 - z^2, (y-z)^2 + x^2) = 0$$

تمرين (2): $x^2 p + y^2 q = (x+y) z$

الحل:

المعادلات المساعدة هي:

$$\underset{①}{\frac{dx}{x^2}} = \underset{②}{\frac{dy}{y^2}} = \underset{③}{\frac{dz}{(x+y)z}}$$

نأخذ ① = ②

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2}$$

بالمكاملة:

$$-\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} + C_1 \quad \Rightarrow C_1 = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = u$$

وهو التكامل الأول الأول.

والآن نأخذ ① - ② = ③

$$\frac{dx - dy}{x^2 - y^2} = \frac{dz}{(x+y)z} \Rightarrow \frac{d(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{dz}{(x+y)z}$$

$$\Rightarrow \frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{dz}{z}$$

بالمكاملة:

$$\ln(x-y) = \ln z + \ln C_2 = \ln z C_2$$

$$\Rightarrow x - y = z C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{x-y}{z} = v$$

وهو التكامل الأول الثاني.

والحل العام هو:

$$F(u,v) = F\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \frac{x-y}{z}\right) = 0$$

تمرين (3):

$$(1+\sqrt{3-x-y})\,p + q = 2$$

الحل:

الجملة المميزة هي:

$$\frac{dx}{1+\sqrt{3-x-y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}$$

① ② ③

من ② و ③.

$$dy = \frac{1}{2}\,dz \Rightarrow 2dy = dz$$

بالمكاملة:

$$2y = z + c_1 \Rightarrow c_1 = 2y - z = u$$

وهو التكامل الأول الأول.

والآن نضرب ① و ② ب -1 «حيث نضرب بسط ومقام»

$$\frac{-dx}{-1-\sqrt{3-x-y}} = \frac{-dy}{-1} = \frac{dz}{2}$$

$$\frac{-dx-dy+dz}{-1-\sqrt{3-x-y}-1+2} = \frac{-dx-dy+dz}{-\sqrt{3-x-y}} \overset{\text{نجمع}}{=} \frac{dy}{1}$$

$$\Rightarrow -\frac{d(3-x-y)}{\sqrt{3-x-y}} = dy$$

بالمكاملة: «حيث ان البسط هو مشتق مضمون الجذر»

/ /

$$\Rightarrow -2\sqrt{z-x-y} = y + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = -2\sqrt{z-x-y} - y = v$$

وهو التكامل الأول الثاني :

والحل العام هو :

$$F(u,v) = F(2y-z \,,\, -2\sqrt{z-x-y} - y) = 0$$

تمرين (4) : $p\sin^2 x + q\tan z = \cos^2 z$

الحل :

الجملة المرافقة هي :

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{dy}{\tan z} = \frac{dz}{\cos^2 z}$$

(1) (2) (3)

نأخذ (2) = (3)

$$\frac{dy}{\tan z} = \frac{dz}{\cos^2 z} \Rightarrow dy = \frac{\tan z \cdot dz}{\cos^2 z}$$

$$\Rightarrow dy = \frac{\frac{\sin z}{\cos z}\, dz}{\cos^2 z} = \frac{\sin z}{\cos^3 z}\, dz = \sin z \cos^{-3} z\, dz$$

بالمكاملة:

$$\int dy = \int \sin z \cos^{-3} z\, dz$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{-2}\cos^{-2} z + C_1$$

$$\Rightarrow C_1 = y - \frac{1}{2}\cos^{-2} z = u$$ وهو التكامل الأول الأول

والآن نأخذ $(1 = 3)$

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{dz}{\cos^2 z}$$

بالمكاملة:

$$-\cot x = \tan z + C_2'$$

$$\Rightarrow C_2' = -(\cot x + \tan z)$$

$$\Rightarrow -C_2' = C_2 = \cot x + \tan z = V$$

وهو التكامل الأولي الثاني.

ومنه الحل العام هو:

$$F(u,v) = F\left(y - \frac{1}{2}\cos^{-2} z \,,\, \cot x + \tan z\right) = 0$$

حل المسألة: تمرين (5): $2(y-x) + 2p(y+z) - 2q(x+z) = 0$

الحل:

نرد المعادلة للشكل: $Pp + Qq = R$

ونقسم على 2

$$\Rightarrow (y+z)p - (x+z)q = -(y-x)$$

الجملة المميزة لها:

$$\underset{(1)}{\frac{dx}{y+z}} = \underset{(2)}{\frac{dy}{-(x+z)}} = \underset{(3)}{\frac{dz}{-(y-x)}}$$

- الآن: نجمع التناسبات الثلاث:

$$\frac{dx+dy+dz}{y+z-x-z-y+x} = \frac{dx+dy+dz}{0}$$

$$\Rightarrow dx+dy+dz=0$$

بالمكاملة:

$$x+y+z = C_1 = u$$

وهو التكامل الأول الأول:

- الآن نضرب ① بـ x و ② بـ y و ③ بـ $-z$ ونجمع:

((بحيث نضرب البسط والمقام))

$$\frac{x\,dx}{xy+xz} = \frac{y\,dy}{-xy-zy} = \frac{-z\,dz}{yz-xz}$$

$$\frac{x\,dx+y\,dy-z\,dz}{xy+xz-xy-zy+yz-xz} = \frac{x\,dx+y\,dy-z\,dz}{0}$$

$$\Rightarrow x\,dx+y\,dy-z\,dz=0$$

بالمكاملة:

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}(x^2+y^2-z^2) = C_2'$$

$$\Rightarrow 2C_2' = C_2 = x^2+y^2-z^2 = v$$ وهو التكامل الأول الثاني

ومنه الحل العام:

$$F(u,v) = F(x+y+z,\ x^2+y^2-z^2) = 0$$

$$yzp - xzq = e^{z}$$

تمرين (6):

الحل:

الجملة الملحقة هي:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{-xz} = \frac{dz}{e^{z}}$$

$$(1) \qquad (2) \qquad (3)$$

- نأخذ $1 = 2$

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{-xz} \Rightarrow \frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$$

$$\Rightarrow -x\,dx = y\,dy \Rightarrow y\,dy + x\,dx = 0$$

بالمكاملة:

$$\frac{1}{2}(x^{2}+y^{2}) = C_1' \Rightarrow 2C_1' = C_1 = x^{2}+y^{2} = u$$

وهو التكامل الأول الأول.

- نجد أنه لا يمكن إيجاد ~~التكامل~~ التكامل الثاني بسهولة.

لذا سوف نستعين بالتكامل الأول.

$$C_1 = x^{2}+y^{2} \Rightarrow y^{2} = C_1 - x^{2}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{C_1 - x^{2}}$$

والآن نأخذ $1 = 3$

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dz}{e^{z}} \Rightarrow \frac{dx}{y} = \frac{z\,dz}{e^{z}}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{C_1 - x^{2}}} = \frac{z\,dz}{e^{z}}$$

بالمكاملة:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{C_1 - x^2}} = \int z\, e^{-z}\, dz = I \quad \ldots \ast$$

$$I = \int z\, e^{-z}\, dz$$

نكامل بالتجزئة:

$$u = z \Rightarrow du = dz$$

$$dv = e^{-z}\, dz \Rightarrow v = -e^{-z}$$

$$I = u.v - \int v\, du = -z e^{-z} - \int -e^{-z}\, dz$$

$$= -z e^{-z} + \int e^{-z}\, dz = -z e^{-z} - e^{-z} + C_2$$

$$\Rightarrow I = -(z+1)\, e^{-z} + C_2$$

نعوض في $\ast$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{C_1 - x^2}} = I \Rightarrow \arcsin \frac{x}{\sqrt{C_1}} = I$$

$$\Rightarrow \arcsin \frac{x}{\sqrt{C_1}} = -(z+1)\, e^{-z} + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = \arcsin \frac{x}{\sqrt{C_1}} + (z+1)\, e^{-z}.$$

$$C_2 = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + (z+1)\, e^{-z} = V$$

Galaxy

وهو التكامل الأول الثاني

ومنه الحل العام:

$$F(u,v) = F\left(x^2+y^2, \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + (z+1)e^{-z}\right) = 0$$

تمرين (7):

$$x y^3 p + x^2 z^2 q = y^3 z$$

والمار بالمنحني:

$$x = -z^3 , \quad y = z^2$$

الحل: نأخذ الجملة المميزة:

$$\frac{dx}{x y^3} = \frac{dy}{x^2 z^2} = \frac{dz}{y^3 z}$$

(1) (2) (3)

- نأخذ (1) و (3)

$$\frac{dx}{x y^3} = \frac{dz}{y^3 z} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$$

نكامل:

$$\ln x = \ln z + \ln c_1 \Rightarrow \ln x = \ln (z \cdot c_1)$$

$$\Rightarrow x = z \cdot c_1 \Rightarrow c_1 = u = \frac{x}{z}$$

- نأخذ (2) و (3)

$$\frac{dy}{x^2 z^2} = \frac{dz}{y^3 z}$$

من c_1 نجد $x = c_1 z \Rightarrow x^2 = c_1^2 z^2$

$$\Rightarrow \frac{dy}{c_1^2 z^4} = \frac{dz}{y^3 z} \Rightarrow y^3\,dy = c_1^2\, z^3\, dz$$

نكامل

$$\Rightarrow \frac{y^4}{4} = c_1^2\,\frac{z^4}{4} + c_2'$$

$$\Rightarrow c_2' = \frac{y^4}{4} - c_1^2\,\frac{z^4}{4}$$

$$\Rightarrow c_2 = 4c_2' = y^4 - c_1^2\, z^4$$

نعوض $c_1^2 = \frac{x^2}{z^2}$

$$c_2 = V = y^4 - x^2 z^2$$

الحل العام $F(u,v) = F\left(\frac{x}{z},\, y^4 - x^2 z^2\right) = 0$

معادلة السطح المار بالمنحنى:

(1) $x = -z^3$ ، (2) $y = z^2$

$$c_1 = \frac{x}{z} \qquad c_2 = y^4 - x^2 z^2$$

نعوض (1) و (2) في c_2

$$c_2 = (z^2)^4 - (-z^3)^2 z^2 = z^8 - z^8 = 0$$

$$\Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow y^4 - x^2 z^2 = 0$$

وهي معادلة السطح المطلوبة.

* السطوح التكاملية المتعامدة مع مجموعة سطوح معطاة.

لنفرض أنه لدينا مجموعة من السطوح التابعة لوسيط واحد معطاة بالمعادلة $Q(x,y,z)=C$ ...①

فالسطوح التكاملية المتعامدة مع هذه السطوح هي السطوح المولدة بالمنحنيات التكاملية للجملة الملحقة

$$\frac{dx}{\frac{\partial Q}{\partial x}}=\frac{dy}{\frac{\partial Q}{\partial y}}=\frac{dz}{\frac{\partial Q}{\partial z}}$$

تمرين: أوجد السطح المتعامد مع أسرة السطوح المعينة بالعلاقة

$$z(x+y)=C(3z+1)$$

والمار بالدائرة:

$$x^2+y^2=1 \quad , \quad z=1$$

الحل: أولاً سنقوم بعزل C حتى نستطيع الاشتقاق

$$C=\frac{z(x+y)}{3z+1}=Q(x,y,z)$$

الجملة الملحقة:

$$\frac{dx}{\frac{z}{3z+1}}=\frac{dy}{\frac{z}{3z+1}}=\frac{dz}{\frac{(x+y)(3z+1)-3z(x+z)}{(3z+1)^2}}$$

قمنا باشتقاق Q بالنسبة x مرة ثم y ثم z.

/ /

$$\Rightarrow \frac{(3z+1)\,dx}{z} = \frac{(3z+1)\,dy}{z} = \frac{(3z+1)^2\,dz}{(x+y)(3z+1-3z)} = \frac{(3z+1)^2\,dz}{x+y}$$

نقسم على $(3z+1)^2$

$$\Rightarrow \frac{dx}{z(3z+1)} = \frac{dy}{z(3z+1)} = \frac{dz}{x+y}$$

1 2 3

من 1 و 2

$$dx = dy$$

نكامل:

$$x = y + c_1 \Rightarrow c_1 = x - y = u$$

وهي معادلة مستقيم.

- نضرب 1 بـ x والثانية بـ y والثالثة بـ $-z(3z+1)$

حيث نضرب لبسط والمقام،

$$\Rightarrow \frac{x\,dx}{xz(3z+1)} = \frac{y\,dy}{yz(3z+1)} = \frac{-z(3z+1)\,dz}{-z(3z+1)(x+y)}$$

$$\Rightarrow \frac{x\,dx}{3xz^2+xz} = \frac{y\,dy}{3yz^2+yz} = \frac{(-3z^2-z)\,dz}{-3xz^2-3yz^2-xz-yz}$$

نجمع:

$$\Rightarrow \frac{x\,dx + y\,dy - (3z^2+z)\,dz}{3xz^2+xz+3yz^2+yz-3xz^2-3yz^2-xz-yz} = 0$$

$$\Rightarrow x\,dx + y\,dy - 3z^2\,dz - z\,dz = 0$$

تكامل: $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-z^3-\frac{z^2}{2}=C_2'$

$$\Rightarrow 2C_2' = C_2 = x^2+y^2-z^2-2z^3 = V$$

وهي السطوح المتعامدة مع φ.

ومنه السطوح التكاملية:

$$F(C_1,C_2)=F(x-y,\ x^2+y^2-z^2-2z^3)=0$$

ولإيجاد معادلة السطح المار بالدائرة:

$x^2+y^2=1$ --- (1) $z=1$ -- (2)

$C_2 = x^2+y^2-z^2-2z^3$ -- (3)

نعوض من (1) و(2) في (3)

$$C_2 = 1-1-2(1) = -2$$

$$\Rightarrow -2 = x^2+y^2-z^2-2z^3$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-z^2-2z^3+2=0$$

هي معادلة السطح المطلوبة.

١٤ / ٤ / ٢٠١٩ المحاضرة الثالثة عشر تفاضلية 2 د. ملك مارديني.

عنوان المحاضرة:

حل مسألة الشروط للمعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام طريقة فصل المتغيرات.

يمكن حل مسألة الشروط المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام طريقة فصل المتغيرات وتتلخص في البحث عن الدالة المجهولة $Z = Z(x,y)$ على شكل جداء والبين، الأولى تتبع ل x فقط والثانية تتبع ل y فقط. أي نبحث عن حل من الشكل $Z = X(x).Y(y)$ عندئذٍ تتحول المشتقات الجزئية إلى مشتقات عادية:

$$Z = X.Y \quad , \quad p = \frac{\partial Z}{\partial x} = X'Y \quad , \quad q = \frac{\partial Z}{\partial y} = XY'$$

$$r = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = X''Y \quad , \quad t = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = XY'' \quad , \quad s = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = X'Y'$$

وبحساب المشتقات والتعويض في المعادلة التفاضلية الجزئية نحصل على معادلة عادية بالنسبة ل Y و X ومشتقاتها وبعملية فصل المتغيرات نحصل على معادلة تفاضلية عادية من الشكل:

$$F(x, x', x'') = G(y, y', y'') = \begin{cases} \lambda \\ -\lambda^2 \\ \lambda^2 \end{cases} \qquad ; \lambda \neq 0$$

- اذا كانت المعادلة من المرتبة الأولى يكون الثابت λ.
- اذا كانت المعادلة من المرتبة الثانية يكون الثابت إما λ^2 أو $-\lambda^2$

مثال ①: حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية باستخدام فصل المتغيرات

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 2\frac{\partial Z}{\partial y} + Z \quad \dots ①$$

حيث $Z(x,0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x}$

الحل: لنوجد المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = X'Y \quad , \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = XY' \quad , \quad Z = X.Y$$

نعوض في المعادلة ①

$$X'Y = 2XY' + XY$$

المعادلة قابلة لفصل المتغيرات، نقسم على: XY

$$\underset{①}{\frac{X'}{X}} = \underset{②}{2\frac{Y'}{Y}} + \underset{③}{1} = \lambda \to \text{ضد ثابتة الأولى}$$

نأخذ ① = ③

$$\frac{X'}{X} = \lambda \Rightarrow \text{نكامل} \ \ln|X| = \lambda x + c_1'$$

$$\Rightarrow X = e^{\lambda x + c_1'} = e^{\lambda x} e^{c_1'} \Rightarrow X = e^{\lambda x} \cdot C_1$$

$$; \ e^{c_1'} = C_1$$

Scanned by CamScanner

نأخذ: ② = ③

$$2\frac{Y'}{Y}+1=\lambda \Rightarrow \frac{Y'}{Y}=\frac{\lambda-1}{2}$$

نتكامل $\ln|Y|=\frac{\lambda-1}{2}y+C_2'$

$$\Rightarrow Y=e^{\frac{\lambda-1}{2}y+C_2'} \Rightarrow Y=e^{\frac{\lambda-1}{2}y}e^{C_2'}$$

$$\Rightarrow Y=e^{\frac{\lambda-1}{2}y}\cdot C_2 \quad ; \quad e^{C_2'}=C_2$$

نعوض كل من X, Y في Z:

$$Z=X\cdot Y=C_1e^{\lambda x}\cdot C_2e^{\frac{\lambda-1}{2}y}$$

$$=C_3\,e^{\lambda x+\frac{\lambda-1}{2}y} \quad ; \quad C_3=C_1\cdot C_2 \quad \ldots *$$

نحسب λ و C_3 من الشرط الابتدائي:

$$Z(x,0)=3e^{-5x}+2e^{-3x}$$

حسب مبدأ تركيب الحلول:

$$Z=C_3\,e^{(\lambda(x+\frac{y}{2})-\frac{y}{2})}$$

$$Z=C_3\,e^{(x+\frac{y}{2})\lambda_1-\frac{y}{2}}+C_4\,e^{(x+\frac{y}{2})\lambda_2-\frac{y}{2}}$$

$$\Rightarrow Z(x,0)=C_3\,e^{\lambda_1x}+C_4\,e^{\lambda_2x} \quad \ldots **$$

Scanned by CamScanner

بالمقارنة مع الشرط الابتدائي نجد:

$C_3 = 3$, $C_4 = 2$

$\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -3$

نعوض في الحل العام:

$$Z(x,y) = 3e^{(-5(x+\frac{y}{2}) - \frac{y}{2})} + 2e^{(-3(x+\frac{y}{2}) - \frac{y}{2})}$$

$$= \boxed{3e^{-5x-3y} + 2e^{-3x-2y}}$$

مثال 2: حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية باستخدام فصل المتغيرات.

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 4\frac{\partial Z}{\partial y} \quad \text{....①}$$

حيث: $Z(0,y) = 8e^{-3y}$

الحل: لنوجد المشتقات الجزئية:

$Z = XY$, $\frac{\partial Z}{\partial y} = XY'$, $\frac{\partial Z}{\partial x} = X'Y$

نعوض في المعادلة ①

$$X'Y = 4XY'$$

المعادلة قابلة لفصل المتغيرات نقسم على $4XY$

$$\frac{X'}{4X} = \frac{Y'}{Y} = \lambda$$

① ② ③

Galaxy

نأخذ ① و ③

$$\frac{X'}{4X} = \lambda \Rightarrow \frac{X'}{X} = 4\lambda$$

$\Rightarrow$ تكامل $\ln|X| = 4\lambda x + C_1'$

$$\Rightarrow X = e^{4\lambda x + C_1'} = e^{4\lambda x} \cdot e^{C_1'}$$

$$\Rightarrow X = C_1 e^{4\lambda x} \quad : e^{C_1'} = C_1$$

نأخذ ② و ③

$$\frac{Y'}{Y} = \lambda \Rightarrow \ln|Y| = \lambda y + C_2'$$

$$\Rightarrow Y = e^{\lambda y + C_2'} = e^{\lambda y} \cdot e^{C_2'}$$

$$\Rightarrow Y = C_2 e^{\lambda y} \quad : e^{C_2'} = C_2$$

نعوض X و Y في Z

$$Z = C_1 e^{4\lambda x} \cdot C_2 e^{\lambda y}$$

$$= C_3 e^{\lambda(4x+y)} \quad : C_3 = C_1 \cdot C_2$$

نحسب λ و C_3 من الشرط الابتدائي:

$$Z(0,y) = 8e^{-3y}$$

$$Z_0(0,y) = C_3 e^{\lambda y} \Rightarrow \lambda = -3 , C_3 = 8$$

$$\Rightarrow \boxed{Z = 8e^{-3(4x+y)}}$$

/ /

مثال ③ : أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية باستخدام فصل المتغيرات :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t} \quad \ldots ①$$

حيث U محدودة ، $0 < x < 3$

$U(x,0) = 5\sin 4\pi x$ ، $U(0,t) = U(3,t) = 0$

الحل:

$$U = XT \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t} = T'X$$

نعوض في ①

$$X''T = \frac{1}{2}T'X$$

نقسم على XT

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{2}\frac{T'}{T} = -\lambda^2$$

① ② ③

نأخذ ① مع ③

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية متجانسة ذات أمثال ثابتة نفرض حلاً من الشكل

$$X = e^{\mu x}$$

* وضعنا $-\lambda^2$ بدلاً من λ^2 لأننا لو وضعنا λ^2 لكان $T = c_3 e^{2\lambda^2 t}$ غير محدود ومنه U غير محدود وهذا يناقض الفرض.

$$\Rightarrow X'' = \mu^2 e^{\mu x}$$

نعوض:

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow \mu^2 e^{\mu x} + \lambda^2 e^{\mu x} = 0$$

$$\Rightarrow e^{\mu x}(\mu^2 + \lambda^2) = 0 \quad : \quad e^{\mu x} \neq 0$$

$$\Rightarrow (\mu^2 + \lambda^2) = 0 \Rightarrow \mu^2 = -\lambda^2$$

$$\Rightarrow \mu = \pm i \lambda$$

والحل العام يكون من شكل:

$$X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$$

نأخذ C_2 و C_3

$$\frac{1}{2} \frac{T'}{T} = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{T'}{T} = -2\lambda^2$$

تكامل

$$\Rightarrow \ln |T| = -2\lambda^2 t + C_3'$$

$$\Rightarrow T = e^{-2\lambda^2 t} e^{C_3'} = e^{-2\lambda^2 t} \cdot C_3 \quad : \quad C_3 = e^{C_3'}$$

نعوض X, T في U

$$U = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) \cdot e^{-2\lambda^2 t} C_3$$

من الشروط الابتدائية

$$U(0,t) = 0 \Rightarrow U(0,t) = (C_1 + 0) C_3 e^{-2\lambda^2 t}$$

$$= C_1 C_3 e^{-2\lambda^2 t} = 0$$

Galaxy

$C_1 C_3 = D = 0$ ومنه $e^{-2\lambda^2 t} \neq 0$ بحث

$$\Rightarrow U = (C_1 C_3 \cos \lambda x + C_2 C_3 \sin \lambda x)\, e^{-2\lambda^2 t}$$

$$= (D \cos \lambda x + E \sin \lambda x)\, e^{-2\lambda^2 t}$$

$$: E = C_2 . C_3$$

بحث $0 = D$ ومنه :

$$U = E \sin \lambda x \; . \; e^{-2\lambda^2 t} \quad \text{---} \ast$$

ومن بشرط الابتدائي الثاني

$U(3,t) = 0 \Rightarrow U(3,t) = E \sin 3\lambda \; e^{-2\lambda^2 t} = 0$

بحث $e^{-2\lambda^2 t} \neq 0$

و $E \neq 0$ لأنه نحصل الحل تافه أي $U = 0 + 0$

ومنه $\sin 3\lambda = 0 \Leftarrow 3\lambda = n\pi \Leftarrow \lambda = \frac{n\pi}{3}$

$$\ast \Rightarrow U = E \sin \frac{n\pi}{3} x \; e^{\frac{-2 n^2 \pi^2}{9} t} \quad \text{---} \ast\ast$$

بقي معامل E من بشرط الاصلي

$U(x,0) = 5 \sin 4 \pi x$

$$U(x,0) = E \sin \frac{n\pi}{3} x$$

بالمقارنة:

$$\Rightarrow \quad E = 5 \qquad n = 12$$

نعوض في **

$$\boxed{U = 5 \sin 4\pi x \; e^{-32\pi^2 t}}$$

١٥ / ٤ / ٢٠١٩ المحاضرة الرابعة عشر تفاضلية 2. د. ملك ماردينى .

عنوان المحاضرة :

* حلول المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى غير الخطية .
* بر هنة الدوال الضمنية .
* ملخص طريقة شارب في حل المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى غير الخطية .

مثال ② : أوجد حل مسألة الشروط التالية باستخدام فصل المتغيرات .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{---} \quad (*)$$

حيث :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \quad , \quad u(x,0) = 3\cos 5x$$

الحل :

$$U = X\,T \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t} = X\,T' \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''\,T$$

نعوض في ①

$$X T' = 5 X'' T$$

نقسم على $5XT$

$$\frac{T'}{5T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

① ② ③

$$① = ③ \Rightarrow \frac{T'}{5T} = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{T'}{T} = -5\lambda^2$$

نكامل $\ln|T| = -5\lambda^2 t + C_1' \Rightarrow T = C_1 e^{-5\lambda^2 t}$

$(2) = (3) \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0$

معادلة تفاضلية عادية خطية من الدرجة الثانية متجانسة والمعادلة المميزة لها
" كما في المحاضرة السابقة "

$m^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow m = \pm i\lambda$

والحل العام لها من الشكل

$X = C_2 \cos \lambda x + C_3 \sin \lambda x$

نعوض عن T و X في U

$U = X \cdot T = e^{-5\lambda^2 t} (C_4 \cos \lambda x + C_5 \sin \lambda x) \quad --- *$

: $C_1 \cdot C_2 = C_4$ و $C_1 \cdot C_3 = C_5$

من الشرط الأول:

$\frac{\partial U}{\partial x}(0,t) = 0$

$\frac{\partial U}{\partial x}(0,t) = e^{-5\lambda^2 t} C_5 \lambda = 0$

حيث $e^{-5\lambda^2 t} \neq 0$ و $\lambda \neq 0$

ومنه $C_5 = 0 \Rightarrow$ نعوض في الحل العام U.

$U = e^{-5\lambda^2 t} (C_4 \cos \lambda x)$

لحساب λ و C_4 من الشرط الثاني

$U(x,0) = 3 \cos 5x$

$U(x,0) = C_4 \cos \lambda x$

Galaxy

/ /

$\Rightarrow C_u = 3$, $\lambda = 5$

نعوض في *

$$\boxed{U = 3\cos 5x \; e^{-125t}}$$

مثال 5 : وظيفة : أوجد حل مسألة الشروط التالية باستخدام فصل المتغيرات ،

$$3\frac{\partial Z}{\partial x} + 2\frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

حيث $Z(x,0) = 4e^{-x}$

الحل :

$Z = X \cdot Y$, $\frac{\partial Z}{\partial x} = X' Y$, $\frac{\partial Z}{\partial y} = X Y'$

نعوض في المعادلة (1)

$3X'Y + 2XY' = 0 \Rightarrow 3X'Y = -2XY'$

نقسم على $6XY$

$$\frac{X'}{2X} = -\frac{Y'}{3Y} = \lambda$$

(1) (2) (3)

$(1) = (3) \Rightarrow \frac{X'}{2X} = \lambda \overset{\text{تكامل}}{\Longrightarrow} \ln|X| = 2\lambda x + C_1'$

$\Rightarrow X = C_1 e^{2\lambda x}$; $C_1 = e^{C_1'}$

$② = ③ \Rightarrow -\frac{Y'}{3Y} = \lambda$ بالتكامل $\Rightarrow \ln|Y| = -3\lambda y + C_2'$

$\Rightarrow Y = C_2 e^{-3\lambda y} \quad ; \quad C_2 = e^{C_2'}$

نعوض في Z

$Z = X \cdot Y = C_1 e^{2\lambda x} \cdot C_2 e^{-3\lambda y}$

$\Rightarrow Z = C_3 e^{\lambda(2x-3y)} \quad ; \quad C_3 = C_1 \cdot C_2$

لحساب C_3 و λ من الشرط الابتدائي.

$Z(x,0) = 4e^{-x}$

$Z(x,0) = C_3 e^{2\lambda x} = 4e^{-x}$

بالمطابقة

$C_3 = 4 \quad , \quad \lambda = -\frac{1}{2}$

فيكون الحل العام:

$$\boxed{Z = 4e^{-\frac{1}{2}(2x-3y)}}$$

مثال ⑥ وظيفة: أوجد الحل للمعادلة التفاضلية التالية باستخدام فصل المتغيرات

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\frac{\partial u}{\partial t} \quad \ldots ①$$

حيث U محدودة ، $0 < x < 3$

$U(0,t) = U(3,t) = 0 \quad , \quad U(x,0) = 5\sin 4\pi x - 3\sin 8\pi x + 2\sin 10\pi x$

الحل:

$U = X \cdot T \quad , \quad \frac{d^2u}{dx^2} = X'' T \quad , \quad \frac{du}{dt} = X T'$

نعوض في ①

$$X'' T = \frac{1}{h^2} T' X$$

نقسم على $X\,T$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{h^2} \frac{T'}{T} = -\lambda^2$$

① ② ③

$$① = ③ \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$\Rightarrow \mu^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \mu = \pm i \lambda$$

والحل العام يعرض بالشكل:

$$X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$$

$$② = ③ \Rightarrow \frac{T'}{T} = -h^2 \lambda^2 \xRightarrow{\text{تكامل}} \ln |T| = -h^2 \lambda^2 t + C_3'$$

$$\Rightarrow T = e^{-h^2 \lambda^2 t} \cdot C_3 \quad ; \quad C_3 = e^{C_3'}$$

نعوض في U

$$U = X\,T = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x)\, e^{-h^2 \lambda^2 t} \cdot C_3$$

$$= (C_4 \cos \lambda x + C_5 \sin \lambda x)\, e^{-h^2 \lambda^2 t}$$

$$; \quad C_4 = C_1 \cdot C_3 \quad , \quad C_5 = C_2 \cdot C_3$$

من الشروط الابتدائية.

$U(0,t)=0$

$U(0,t)=C_4\, e^{-h^2\lambda^2 t}=0 \Rightarrow C_4=0$

$U(3,t)=0 \quad , C_4=0$

$U(3,t)=C_5 \sin 3\lambda \; e^{-h^2\lambda^2 t}=0$

حيث $e^{-h^2\lambda^2 t}\neq 0$, $C_5\neq 0$ لانه يجعل الحل تافه

$\Rightarrow \sin 3\lambda=0 \;=\; 3\lambda=n\pi \Rightarrow \lambda=\frac{n\pi}{3}$

$\Rightarrow \quad U=C_5 \sin \frac{n\pi}{3}x \; e^{-\frac{h^2 n^2\pi^2}{9}t}$

ومنه حسب مبدأ تركيب الحلول:

$U=C_5\, e^{-\frac{h^2 n_1^2\pi^2}{9}t}\sin\frac{n_1\pi}{3}x+C_6\, e^{-\frac{h^2 n_2^2\pi^2}{9}t}\sin\frac{n_2\pi}{3}x$

$+C_7\, e^{-\frac{h^2 n_3^2\pi^2}{9}t}\sin\frac{n_3\pi}{3}x$

ومن الشرط: $U(x,0)=5\sin 4\pi x-3\sin 8\pi x+2\sin 10\pi x$

$\frac{n_1\pi}{3}=4\pi \Rightarrow n_1=12 \qquad , C_5=5$

$\frac{n_2\pi}{3}=8\pi \Rightarrow n_2=24 \qquad C_6=-3$

$\frac{n_3\pi}{3}=10\pi \Rightarrow n_3=30 \qquad C_7=2$

نعوض في U لنحصل على الحل العام.

* حلول المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى غير الخطية:

- برهنة الدوال الضمنية:

ليكن لدينا الآتين: $F(x,y,z,p,q)=0$, $\phi(x,y,z,p,q)=0$

حيث q و p والتين المجهولين تابعين للمتغيرات المستقلة x,y,z

عندها تكون المشتقات الجزئية كالتالي:

(1) $$\frac{dq}{dx} = \frac{\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial q}}{\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \phi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \phi}{\partial q}}$$

(2) $$\frac{dp}{dy} = \frac{\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial q}}{\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \phi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \phi}{\partial q}}$$

(3) $$\frac{dp}{dz} = \frac{\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial q}}{\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \phi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \phi}{\partial q}}$$

(4) $$\frac{dq}{dz} = \frac{\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \phi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \phi}{\partial q}}$$

إثبات العلاقة ٤ :

نأخذ المشتقات الجزئية لعلاقتي F , ϕ بالنسبة x, y, z :

(1) $$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

(2) $$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

(3) $$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial z} = 0$$

(4) $$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

(5) $$\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

(6) $$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial z} = 0$$

من (1) نجد :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\frac{\partial F}{\partial p}}$$

من (4) نجد :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial \phi}{\partial p}}$$

/ /

بالمساواة:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{\frac{\partial \phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial p}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial p}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial p}=\frac{\partial \phi}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p}+\frac{\partial \phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}$$

بعزل الحدود التي تحوي $\frac{\partial q}{\partial x}$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial p}-\frac{\partial \phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p}=\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial p}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial q}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \phi}{\partial p}-\frac{\partial \phi}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial p}\right]=\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial p}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial p}-\frac{\partial \phi}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial p}}}$$

وهو المطلوب ..

طريقة شارب في حل المعادلات التفاضلية الجزئية من الدرجة الأولى غير الخطية:

* ملخص طريقة شارب:

لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى غير الخطية نتبع ما يلي.

① نحسب المشتقات الجزئية للمعادلة $F(x, y, z, p, q) = 0$ — ①

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{\partial F}{\partial p}, \quad \frac{\partial F}{\partial q}$$

ثم نعوض هذه المشتقات في جملة المساعدة التالية

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}} = -\frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}}$$

② نوجد حل تام للجملة المساعدة ويكون شرط أن يحتوي على p أو q أو كلاهما. $\phi(x, y, z, q, p, a) = 0$ — ②

③ نحل المعادلتين F و ϕ بالنسبة لـ p, q:

$$\left.\begin{array}{l} p = p(x, y, z, a) \\ q = q(x, y, z, a) \end{array}\right\} \text{--} ③$$

نعوض ③ في هذه العلاقة:

$$dz = p\,dx + q\,dy \quad \text{--} ④$$ نسميها ④

④ نوجد حل المعادلة ④ ويكون من شكل:

$$f(x, y, z, a, b) = 0 \quad \text{--} ⑤$$

وهو الحل التام للمعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى غير الخطية.

لتكن $\tau(a) = b$ عندها:

$$f(x, y, z, a, \tau(a)) = 0 \quad \ldots (6)$$

هو الحل العام حيث $\tau(a)$ دالة اختيارية.

ملاحظة:

- إذا كانت $\tau(a)$ دالة معينة عندها نحصل على الحل الخاص.
- إذا كان مغلف مجموعة السطوح (5) موجود فهو يمثل الحل الشاذ.

---

٢٢ / ٤ / ٢٠١٩ المحاضرة الخامسة عشر تفاضلية 2 د. ملك ماروني.

عنوان المحاضرة:

طريقة شارب في حل المعادلات التفاضلية. «تمارين»

تمرين ①: أوجد الحل التام للمعادلة التالية بطريقة شارب:

$$(z+px)^2-q=0 \quad \text{---} ①$$

الحل: نوجد المشتقات الجزئية:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2p(z+px) \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=2(z+px) \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial p}=2x(z+px) \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial q}=-1$$

نعوض هذه المشتقات في جملة الملحقة:

$$\frac{dx}{2x(z+px)}=\frac{dy}{0-1}=\frac{dz}{2xp(z+px)+q(-1)}$$

$$=-\frac{dp}{2p(z+px)+2p(z+px)}=-\frac{dq}{0+2q(z+px)}$$

$$\Rightarrow \underset{①}{\frac{dx}{2x(z+px)}}=\underset{②}{\frac{dy}{-1}}=\underset{③}{\frac{dz}{2xp(z+px)-q}}=\underset{④}{-\frac{dp}{4p(z+px)}}=\underset{⑤}{-\frac{dq}{2q(z+px)}}$$

نأخذ $1=5$

$$\frac{dx}{2x(z+px)}=-\frac{dq}{2q(z+px)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dq}{q} \overset{\text{بتكامل}}{\Longrightarrow} \ln x = -\ln q + \ln a$$

$$\Rightarrow \ln x = \ln q^{-1} \cdot a$$

$$\Rightarrow x = q^{-1} a \Rightarrow \boxed{q = \frac{a}{x}}$$

نعوض في المعادلة ①

$$(z + px)^2 - q = 0 \Rightarrow (z + px)^2 = q$$

$$\Rightarrow z + px = \sqrt{q} \Rightarrow p = \frac{\sqrt{q} - z}{x}$$

$$\Rightarrow p = \frac{\sqrt{\frac{a}{x}} - z}{x} \Rightarrow \boxed{p = \frac{\sqrt{\frac{a}{x}}}{x} - \frac{z}{x}}$$

نعوض p و q في العلاقة التالية

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

$$dz = \frac{\sqrt{\frac{a}{x}}}{x}\,dx - \frac{z}{x}\,dx + \frac{a}{x}\,dy$$

$$x\,dz = \sqrt{a}\,\frac{dx}{\sqrt{x}} - z\,dx + a\,dy$$

$$x\,dz + z\,dx = \sqrt{a}\,\frac{dx}{\sqrt{x}} + a\,dy$$

$$d(x z) = \sqrt{a}\,\frac{dx}{\sqrt{x}} + a\,dy$$

Galaxy

نتكامل:

$$x.z = 2\sqrt{a}\sqrt{x} + ay + b$$

$$z = 2\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} + a\frac{y}{x} + \frac{b}{x}$$

وهو الحل التام للمعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية.

* ونلاحظ أنه يمكننا أخذ أي نسبتين من الجملة الملحقة لإيجاد الحل التام.
لنأخذ $1 = u$

$$\frac{dx}{2x(z+px)} = -\frac{dp}{4p(z+px)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dp}{2p} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\frac{dp}{p}$$

نكامل $\Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2}\ln p + \ln a'$

$$\Rightarrow \ln x = \ln p^{-\frac{1}{2}}.a' \Rightarrow x = p^{-\frac{1}{2}}a' = \frac{a'}{p^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow p^{\frac{1}{2}} = \frac{a'}{x} \Rightarrow p = \frac{a'^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{p = \frac{a}{x^2}} \quad ; \quad a'^2 = a$$

نعوض p في المعادلة ①

$$(z+px)^2 - q = 0 \Rightarrow (z+px)^2 = q$$

$$\Rightarrow q = \left(z + \frac{a}{x^2}\,x\right)^2 \Rightarrow \boxed{q = \left(z + \frac{a}{x}\right)^2}$$

نعوض q و p في المعادلة التالية :

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

$$dz = \frac{a}{x^2}\,dx + \left(z + \frac{a}{x}\right)^2 dy$$

$$\Rightarrow \left(z + \frac{a}{x}\right)^2 dy = dz - \frac{a}{x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow dy = \frac{dz - \frac{a}{x^2}\,dx}{\left(z + \frac{a}{x}\right)^2} = \frac{d\left(z + \frac{a}{x}\right)}{\left(z + \frac{a}{x}\right)^2} \quad ✱$$

$$\boxed{\begin{aligned} d\left(z + \frac{a}{x}\right) &= dz + d\,\frac{a}{x} = dz + \left(-\frac{a}{x^2}\right)dx \\ &= d\left(z - \frac{a}{x^2}\right) \end{aligned}}$$

الآن نكامل dy :

$$y + b = -\frac{1}{z + \frac{a}{x}}$$

$$;\ dy = \frac{u'}{u^2} = u'\,u^{-2}$$

$$;\ u = z + \frac{a}{x} \Rightarrow y = \frac{1}{-2+1}\,u^{-2+1}$$

$$\Rightarrow z + \frac{a}{x} = -\frac{1}{y+b}$$

$$\Rightarrow z = -\frac{a}{x} - \frac{1}{y+b}$$

وهو الحل التام.

تمرين ② : وظيفة : أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية باستخدام طريقة شاربت

$$(z+qy)^2 - p = 0 \quad \dots \text{①}$$

الحل: نوجد المشتقات الجزئية:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2q(z+qy)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2(z+qy) \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial p} = -1 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 2y(z+qy)$$

نعوض في جملة المميزات:

$$\frac{dx}{-1} = \frac{dy}{2y(z+qy)} = \frac{dz}{p(-1) + q(2y(z+qy))}$$

$$= -\frac{dp}{0 + 2p(z+qy)} = -\frac{dq}{2q(z+qy) + 2q(z+qy)}$$

$$\Rightarrow \underset{①}{\frac{dx}{-1}} = \underset{②}{\frac{dy}{2y(z+qy)}} = \underset{③}{\frac{dz}{-p+2qy(z+qy)}} = \underset{④}{-\frac{dp}{2p(z+qy)}}$$

$$= \underset{⑤}{-\frac{dq}{4q(z+qy)}}$$

نأخذ ④ = ②:

$$\frac{dy}{2y(3+qy)} = -\frac{dP}{2P(3+qy)} \Rightarrow -\frac{dy}{y} = \frac{dP}{P}$$

$$\Rightarrow -\ln y + \ln a = \ln P$$

$$\ln y^{-1} + \ln a = \ln P \Rightarrow y^{-1} \cdot a = P$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{a}{y}}$$

نعوض في المعادلة ①:

$$(3+qy)^2 = P \Rightarrow \sqrt{P} = 3+qy$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{y}} = 3+qy \Rightarrow \boxed{q = \frac{\sqrt{\frac{a}{y}} - 3}{y}}$$

نعوض P و q في المعادلة التالية:

$$dz = P\,dx + q\,dy$$

$$\Rightarrow dz = \frac{a}{y}\,dx + \frac{\sqrt{\frac{a}{y}}}{y}\,dy - \frac{3}{y}\,dy$$

$$\Rightarrow y\,dz = a\,dx + \sqrt{\frac{a}{y}}\,dy - 3\,dy$$

$$\Rightarrow y\,dz + 3\,dy = a\,dx + \sqrt{\frac{a}{y}}\,dy$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow d(y.z) = a\,dx + \sqrt{a}\,\frac{dy}{\sqrt{y}}$$

بتكامل

$$\Rightarrow y.z = ax + 2\sqrt{a}\sqrt{y} + b$$

$$\Rightarrow z = \frac{ax}{y} + \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{y}} + \frac{b}{y}$$

وهو الحل التام.

تمرين 3: وظيفة، أوجد الحل التام للمعادلة التفاضلية باستخدام طريقة شاربت

$$z - pq = 0 \quad \ldots (1)$$

الحل: نوجد المشتقات الجزئية:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = -q \qquad \frac{\partial F}{\partial q} = -p$$

نعوض في جملة الملحقة:

$$\frac{dx}{-q} = \frac{dy}{-p} = \frac{dz}{-pq-pq} = -\frac{dp}{p} = -\frac{dq}{q}$$

$$(1) \qquad (2) \qquad (3) \qquad (4) \qquad (5)$$

نأخذ (5) = (4)

$$-\frac{dp}{p} = -\frac{dq}{q} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$$

بتكامل

$$\Rightarrow \ln p = \ln q + \ln a \Rightarrow \boxed{p = q.a}$$

Galaxy

نعوض من في المعادلة ① :

$$z - pq = 0 \Rightarrow z = pq$$

$$\Rightarrow z = aq \cdot q = aq^2 \Rightarrow q^2 = \frac{z}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{q = \sqrt{\frac{z}{a}}}$$

$$\Rightarrow p = aq = a\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{a}} \Rightarrow \boxed{p = \sqrt{a \cdot z}}$$

نعوض كل من q و p في المعادلة الأولى:

$$dz = p\,dx + q\,dy = \sqrt{az}\,dx + \sqrt{\frac{z}{a}}\,dy$$

$$\Rightarrow dz = \sqrt{a}\sqrt{z}\,dx + \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{z}\,dy$$

$$= \sqrt{z}\left(\sqrt{a}\,dx + \frac{dy}{\sqrt{a}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{a}\,dx + \frac{1}{\sqrt{a}}\,dy$$

نكامل $\Rightarrow 2\sqrt{z} = \sqrt{a}\,x + \frac{y}{\sqrt{a}} + b$

نربع $\Rightarrow 4z = \left(\sqrt{a}\,x + \frac{y}{\sqrt{a}} + b\right)^2$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{4}\left[\sqrt{a}\,x + \frac{y}{\sqrt{a}} + b\right]^2$$ وهو الحل التام.

/ /

تمرين (10): وظيفة: أوجد الحل التام للمعادلة التالية باستخدام طريقة شاربت

$$pq - px - qy = 0 \quad ---(1)$$

الحل: نوجد المشتقات الجزئية:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -p \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -q \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = q - x \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial q} = p - y$$

نعوض في جملة الملحقة:

$$\frac{dx}{q-x} = \frac{dy}{p-y} = \frac{dz}{2pq - px - qy} = -\frac{dp}{-p} = -\frac{dq}{-q}$$

(1) (2) (3) (4) (5)

نأخذ (4) = (5)

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} \Rightarrow \ln p = \ln q + \ln a$$

$$\Rightarrow p = q.a$$

نعوض في المعادلة (1):

$$pq - px - qy = 0 \Rightarrow q.a.q - q.a.x - q.y = 0$$

$$\Rightarrow aq^2 - aqx - qy = 0 \Rightarrow q(aq - ax - y) = 0$$

يميز حالتين:

(1) $q = 0$ وهذا مرفوض لأن q تابع لـ x, y, z

(2) $aq - ax - y = 0$ ومنه:

$$aq = ax + y \Rightarrow \boxed{q = x + \frac{y}{a}}$$

Scanned by CamScanner

نعوض في P :

$P = a.q = a(x + \frac{y}{a}) \Rightarrow \boxed{P = ax + y}$

نعوض q و P في المعادلة التالية

$dz = Pdx + qdy$

$= (ax + y)dx + (x + \frac{y}{a})dy$

$= axdx + ydx + xdy + \frac{y}{a}dy$

$\Rightarrow dz = axdx + \frac{y}{a}dy + d(x.y)$

نكامل $\Rightarrow z = \frac{a}{2}x^2 + \frac{y^2}{2a} + x.y + b$

وهو الحل التام.