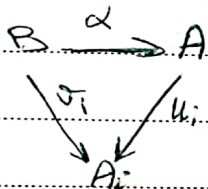


الجداء و المجموع

الجداء



تعريف: يمكن لفئة \mathcal{C} (أسرة من أشياء الفئة \mathcal{C}) وليكن $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$ و $(u_i: A \rightarrow A_i)_{i \in I}$ أسرة من مورفزمات الفئة \mathcal{C} إذا كان

نقول إنه الثنائية $(A, (u_i)_{i \in I})$ جداء للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ إذا كان

لا يوجد أي $B \in \text{ob}(\mathcal{C})$ و $(\nu_i: B \rightarrow A_i)_{i \in I}$ من مورفزمات الفئة \mathcal{C} يوجد مورفزم $\alpha: B \rightarrow A$ ففئة $\alpha \cdot \nu_i = u_i \cdot \nu_i$ وتسمى المورفزم α بالمورفزم البسيط

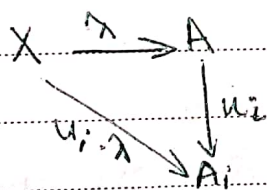
مبرهنة: يمكن لفئة \mathcal{C} (أسرة من أشياء الفئة \mathcal{C}) الشروط الآتية متكافئة:

1. الثنائية $(A, (u_i: A \rightarrow A_i)_{i \in I})$ جداء للأسرة $(A_i)_{i \in I}$

2. لأي $x \in \text{ob}(\mathcal{C})$ و العلاقة $\Gamma: \prod_{i \in I} \mathcal{P}(x, A_i) \rightarrow \mathcal{P}(x, A)$

المعرفة بالسك $\Gamma(\lambda) = (u_i \cdot \lambda)_{i \in I}$ و $\forall \lambda \in \prod_{i \in I} \mathcal{P}(x, A_i)$ و تطبيق متباين و غامر

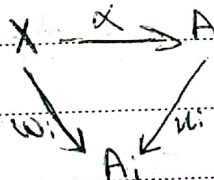
البيان:



① \Leftarrow ② واضح أنه Γ تطبيق

لعرفت علاقة $\Gamma^{-1}: \prod_{i \in I} \mathcal{P}(x, A_i) \rightarrow \mathcal{P}(x, A)$

$$\Gamma^{-1}((w_i)_{i \in I}) = \alpha$$



$$\forall i \in I, u_i \cdot \alpha = w_i$$

إن Γ^{-1} تطبيق

إن Γ و Γ^{-1} هما $\Gamma \cdot \Gamma^{-1} = I$ هون خرد عن Γ و Γ^{-1} هون Γ و Γ^{-1} هما

$$\Gamma \cdot \Gamma^{-1}: \prod_{i \in I} \mathcal{P}(x, A_i) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{P}(x, A_i)$$

$$\forall (w_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{P}(x, A_i) \text{ و } \Gamma \cdot \Gamma^{-1}((w_i)_{i \in I}) = \Gamma(\Gamma^{-1}((w_i)_{i \in I}))$$

$$= \Gamma(\alpha) = (u_i \cdot \alpha)_{i \in I} = (w_i)_{i \in I}$$

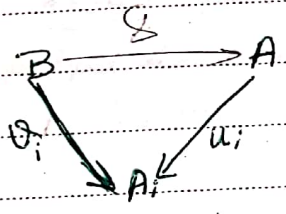
$$\Gamma \cdot \Gamma^{-1} = I_{\prod_{i \in I} \mathcal{P}(x, A_i)}$$

$$\Gamma^{-1} \cdot \Gamma \cdot P(x, A) \rightarrow P(x, A)$$

$$\forall \sigma \in P(x, A); \Gamma^{-1} \cdot \Gamma(\sigma) = \Gamma^{-1}(\Gamma(\sigma)) = \Gamma^{-1}((u_i, \sigma)_{i \in I}) = \sigma$$

$\Gamma^{-1} \cdot \Gamma = I_{P(x, A)}$

وبالتالي التطبيق Γ مطابق وقائم
 ① \Leftrightarrow ② : لفرضية Γ مطابق وقائم



لكن $(u_i: B \rightarrow A_i)_{i \in I}$ ليس من المورفزمات
 الفئة \mathcal{P}

لذلك $X=B$ مفيد أن $\in \prod_{i \in I} P(B, A_i)$

ولما كان Γ قائم يوجد $\alpha \in P(B, A)$ طبق $\Gamma(\alpha) = (u_i, \alpha)_{i \in I}$

$$\Rightarrow (u_i, \alpha)_{i \in I} = (u_i, \sigma)_{i \in I}$$

لفرضية Γ يوجد مورفزم $\delta: B \rightarrow A$ طبق $(u_i, \delta)_{i \in I} = (u_i, \alpha)_{i \in I}$

$$\Gamma(\delta) = (u_i, \delta)_{i \in I} = \Gamma(\alpha) \Rightarrow \delta = \alpha$$

وهذا بين أنه الشاكلة $(A, (u_i)_{i \in I})$ هي جدار لـ Γ محمية

لكن \mathcal{P} فئة \mathcal{P} و $(A_i)_{i \in I}$ ليس من أشياء الفئة \mathcal{P} لفرضية Γ كلاً في

$$(A_i)_{i \in I} \text{ و } (A, (u_i: A \rightarrow A_i)_{i \in I}) \text{ و } (A', (u_i: A' \rightarrow A_i)_{i \in I}) \text{ هو جدار لـ } \Gamma$$

عندئذ يوجد المورفزم $\alpha: A \rightarrow A'$

البيان : لا كونه الشاكلة $(A, (u_i)_{i \in I})$ جدار الأربعة $(A_i)_{i \in I}$ فإنه لا جد لـ Γ المورفزم

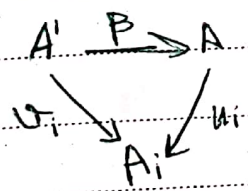
$$B: A' \rightarrow A \text{ يوجد مورفزم } \beta: A' \rightarrow A$$

$$u_i \circ \beta = u_i \quad \forall i \in I$$

ولا كونه الشاكلة $(A', (u_i)_{i \in I})$ جدار لـ Γ فإنه لا جد لـ Γ المورفزم

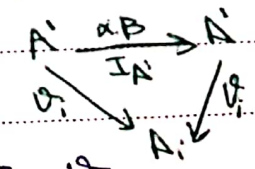
$$(u_i: A \rightarrow A_i)_{i \in I} \text{ يوجد مورفزم } \alpha: A \rightarrow A'$$

$$u_i \circ \alpha = u_i \quad \forall i \in I$$



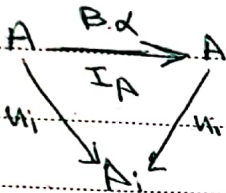
$$\alpha \circ \beta: A' \rightarrow A'$$

$$\beta \circ \alpha: A \rightarrow A$$



$$u_i \circ (\alpha \circ \beta) = (u_i \circ \alpha) \circ \beta = u_i \circ \beta = u_i$$

و حسب التعريف في A' $\alpha \circ \beta = I_{A'}$



$$u_i \cdot (B \cdot \alpha) = (u_i \cdot B) \cdot \alpha = u_i \cdot \alpha = u_i$$

فدس البقيت $B \cdot \alpha = I_A$
 وميند خان α الوجود موزيم

مريضة لسكن P فئة $(A_i)_{i \in I}$ أسرة فدا أشياء الفئة P إذا كانت الثانية
 $(A, (\pi_i : A \rightarrow A_i)_{i \in I})$ جداء الأسرة $(A_i)_{i \in I}$ عنيد

1- لأحد كذا $i \in I$ يوم موزيم $\alpha_i : A_i \rightarrow A$ تحت

$$\pi_i \cdot \alpha_i = I_{A_i} \quad \forall i \in I$$

2- لأحد كذا $i \in I$ الموزيم π_i اليوم موزيم
 البقيت 1- إذا كانت الثانية $(A, (\pi_i)_{i \in I})$ جداء الأسرة $(A_i)_{i \in I}$ خاتمة لأحد

كذا $P(x, A) \rightarrow \prod_{j \in I} P(x, A_j)$ والتطبيق $\Gamma : P(x, A) \rightarrow \prod_{j \in I} P(x, A_j)$ جبايت وغاير

لنفس $\Gamma : \prod_{j \in I} P(x, A_j) \rightarrow P(x, A)$
 هذا التطبيق القادر المرفوع بالشكل
 فمينة التطبيق $\Gamma_i((w_i)_{i \in I}) = w_i$

$$\Gamma_i \Gamma : P(x, A) \rightarrow P(x, A_i)$$

ولأحد $x = A_i$ في أية البقيت $\Gamma_i \Gamma : P(A_i, A) \rightarrow P(A_i, A_i)$ غاير ولذا كذا

$$I_{A_i} \in P(A_i, A_i) \Rightarrow \text{يوجد } \alpha_i : A_i \rightarrow A$$

$$\Gamma_i \Gamma(\alpha_i) = I_{A_i} \quad \text{طبقاً}$$

$$I_{A_i} = \Gamma_i \Gamma(\alpha_i) = \Gamma_i(\Gamma(\alpha_i)) = \Gamma_i((\pi_j \cdot \alpha_i)_{j \in I}) = \pi_i \cdot \alpha_i$$

$$\Gamma(\lambda) = (\pi_i \cdot \lambda)_{i \in I}$$

$$\pi_i : A \rightarrow A_i \quad \text{اليوم موزيم}$$

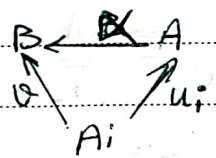
$$\forall i \in I \quad \pi_i \cdot \alpha_i = I_{A_i} \quad \text{تحت}$$

ولذا I_{A_i} اليوم موزيم π_i اليوم موزيم لأن π_i مستقرها

ولذا I_{A_i} اليوم موزيم α_i اليوم موزيم α_i مستقرها

المجموع

تعريف: لنكن $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أسماء الفئة \mathcal{L} ونقول عن الثنائية $(A, (u_i: A_i \rightarrow A)_{i \in I})$ عقدة $A \in \text{ob}(\mathcal{L})$ أنها مجموع للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ إذا كانت لأجل أي أسرة $(\vartheta_i: A_i \rightarrow B)_{i \in I}$ من مورفزمات الفئة \mathcal{L} يوجد مورفزم $\alpha: A \rightarrow B$ يحقق $\alpha \circ u_i = \vartheta_i$ $\forall i \in I$.

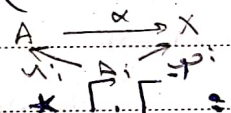


لنكن $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أسماء الفئة \mathcal{L} .
الشرط التالي متكافئ:

1- الثنائية $(A, (u_i: A_i \rightarrow A)_{i \in I})$ هي مجموع للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ إذا وفقط إذا كان لكل $x \in \text{ob}(\mathcal{L})$ فإِنَّ التطبيق $\Gamma: \mathcal{L}(A, x) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{L}(A_i, x)$ متبايناً ونظاماً.
 $\Gamma(\alpha) = (\alpha \circ u_i)_{i \in I}$

البرهان: 1 ← 2. واضح أن Γ تطبيق.

لنرى العلاقة $\Gamma^{-1}(\prod_{i \in I} \mathcal{L}(A_i, x)) \rightarrow \mathcal{L}(A, x)$ حيث $\Gamma^{-1}(\prod_{i \in I} \mathcal{L}(A_i, x)) = \alpha$ وذلك من $\forall i \in I \exists \alpha \circ u_i = w_i$



$$\Gamma \circ \Gamma^{-1} = \pi \mathcal{L}(A_i, x) \rightarrow \pi \mathcal{L}(A_i, x)$$

$$\Gamma \circ \Gamma^{-1}((w_i)_{i \in I}) = \Gamma(\Gamma^{-1}((w_i)_{i \in I})) = \Gamma(\alpha) = (\alpha \circ u_i)_{i \in I} = (w_i)_{i \in I}$$

$$\Rightarrow \Gamma \circ \Gamma^{-1} = I_{\prod_{i \in I} \mathcal{L}(A_i, x)}$$

$$\forall \alpha \in \mathcal{L}(A, x), \Gamma^{-1} \circ \Gamma(\alpha) = \Gamma^{-1}(\Gamma(\alpha)) = \Gamma^{-1}((\alpha \circ u_i)_{i \in I}) = \alpha$$

$$\Rightarrow \Gamma^{-1} \circ \Gamma = I_{\mathcal{L}(A, x)}$$

وبفعلنا فإن التطبيق Γ متباين ونظام.

2 ← 1. لنكن $(\vartheta_i: A_i \rightarrow x)_{i \in I}$ أسرة من مورفزمات الفئة \mathcal{L} عندها

$(\vartheta_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{L}(A_i, x)$ ولما كانت Γ نظاماً يوجد $\alpha \in \mathcal{L}(A, x)$ حيث

$$\Gamma(\alpha) = (\vartheta_i)_{i \in I}, \Gamma(\alpha) = (\alpha \circ u_i)_{i \in I}, (\alpha \circ u_i)_{i \in I} = (\vartheta_i)_{i \in I}$$

وبالتالي فإننا نحفظ تسليح

$$(\beta \circ u_i)_{i \in I} = (\vartheta_i)_{i \in I} \text{ حيث } \beta \in \mathcal{L}(A, x) \text{ لكن } *$$

$$\Gamma(\beta) = (\beta \circ u_i)_{i \in I} = (\vartheta_i)_{i \in I} = \Gamma(\alpha)$$

$$\Leftarrow \alpha = \beta \text{ وبالتالي } (A, (u_i)_{i \in I}) \text{ مجموع}$$

فرضية:

ليكن عائلة $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة \mathcal{A} لفرضية الشائبة
 $(A, (u_i)_{i \in I} : A_i \rightarrow A)_{i \in I}$ و $(B, (v_i)_{i \in I} : A_i \rightarrow B)_{i \in I}$ فكذلك في مجموع الأسرة
 $(A_i)_{i \in I}$ عندئذ يوجد المورفين $\alpha : A \rightarrow B$

البرهان:

لما كانت الشائبة $(A, (u_i)_{i \in I})$ مجموع الأسرة $(A_i)_{i \in I}$ فإننا يوجد مورفين α و β

$$\alpha \cdot u_i = v_i \quad \forall i \in I \quad \alpha : A \rightarrow B$$

لما كانت الشائبة $(B, (v_i)_{i \in I})$ مجموع الأسرة $(A_i)_{i \in I}$ فإننا يوجد مورفين β و γ $\beta : B \rightarrow A$

$$\beta \cdot v_i = u_i \quad \forall i \in I$$

* من جهة أخرى، كما لاحظنا كذلك $i \in I$ فإننا

$$\alpha \cdot u_i = \beta \cdot v_i = \beta \cdot (\alpha \cdot u_i) = (\beta \cdot \alpha) \cdot u_i \Rightarrow \beta \cdot \alpha = I_A$$

$$\beta \cdot v_i = \alpha \cdot u_i = \alpha \cdot (\beta \cdot v_i) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v_i \Rightarrow \alpha \cdot \beta = I_B$$

أي أن α المورفين عكسي

نظرية:

ليكن عائلة $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة \mathcal{A} ، إذا كانت الشائبة $(A, (z_i)_{i \in I} : A_i \rightarrow A)_{i \in I}$ مجموع الأسرة $(A_i)_{i \in I}$ عندئذ

1- لاحظنا كذلك $i \in I$ يوجد مورفين $\alpha_i : A \rightarrow A_i$ $\alpha_i \cdot z_i = I_{A_i}$

2- لاحظنا كذلك $i \in I$ المورفين $z_i : A_i \rightarrow A$ مورفين عكسي (مورفين عكسي اعتيادي)

البرهان:

لما كانت الشائبة $(A, (z_i)_{i \in I})$ مجموع الأسرة $(A_i)_{i \in I}$ فإننا نطبق

$$\Gamma : \prod_{k \in I} \mathcal{L}(A_k, X) \rightarrow \mathcal{L}(A, X)$$

لفرضنا أن

$$\Gamma_i : \prod_{k \in I} \mathcal{L}(A_k, X) \rightarrow \mathcal{L}(A_i, X)$$

$$\Gamma_i(\mathcal{L}_{A_k})_{k \in I} = \mathcal{L}_{A_i}$$

وهذا فإنه

$$\Gamma_i \cdot \Gamma : \prod_{k \in I} \mathcal{L}(A_k, X) \rightarrow \mathcal{L}(A_i, X)$$

وهذا فإنه نطبق غاير λ لاحظ $\lambda = A_i$ في أن $I_{A_i} \in \mathcal{L}(A_i, A_i)$

والتالي يوجد عنصر في المنطق $A_i \rightarrow A_i$ α_i حيث $\Gamma_i(\alpha_i) = I_{A_i}$
 $\Gamma_i(\alpha_i) = \Gamma_i(\Gamma(\alpha_i)) = \Gamma_i((\alpha_i \cdot I_k)_{k \in I}) = \alpha_i \cdot I_i = I_{A_i}$

س. وظيفة

ب.

النواة:

تعريف:

ليكن $f: N \rightarrow A$ و $u_1, u_2: A \rightarrow B$ مورفزمين للفضة f ، ولنفرض أنه f مورفزم للفضة f ، نقول أنه الثاني (نواة المورفزمين u_1, u_2) إذا تحقق:

1- لأجل كل $x \in \text{ob}(f)$ ولأجل كل مورفزم $\lambda: X \rightarrow A$ تحقق $u_1 \cdot \lambda = u_2 \cdot \lambda$

وجود مورفزم $\alpha: X \rightarrow N$ حيث $f \cdot \alpha = \lambda$

2- إذا كان لأجل كل $x \in \text{ob}(f)$ ولأجل كل مورفزم $\lambda: X \rightarrow A$ يوجد مورفزم

$\alpha: X \rightarrow N$ حيث $f \cdot \alpha = \lambda$ فإنه

$$u_1 \cdot \lambda = u_2 \cdot \lambda$$