الجداء و المجموع :

الجداء

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "v_i"'] & A \arrow[d, "u_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

تعريف: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$
وليكن $A\in ob(\mathcal{L})$ و $(u_i : A \to A_i)_{i\in I}$ أسرة من مورفيزمات الفئة.
نقول إن الثنائية $(A,(u_i)_{i\in I})$ هي جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ إذا كان
لأجل أي $B\in ob(\mathcal{L})$ ولأجل أي أسرة $(v_i : B \to A_i)_{i\in I}$ من مورفيزمات الفئة $\mathcal{L}$.
يوجد مورفيزم وحيد $\alpha : B \to A$ تحقق $u_i\circ\alpha = v_i \; \forall i\in I$ وتسمى المورفيزمات u_i بالمورفيزمات الإسقاطية

مبرهنة: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$. الشروط الآتية متكافئة:

1. الثنائية $(A,(u_i : A\to A_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$
2. أياً كان $X\in ob(\mathcal{L})$ فإن العلاقة $\Gamma : \mathcal{L}(X,A) \to \prod_{i\in I}\mathcal{L}(X,A_i)$
المعرفة بالشكل: $\forall \lambda\in\mathcal{L}(X,A) ; \Gamma(\lambda) = (u_i\circ\lambda)$ هي تطبيق متباين وغامر.

البرهان:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "u_i\circ\lambda"'] & A \arrow[d, "u_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

① $\Leftarrow$ ② واضح أن Γ تطبيق.

لنعرف علاقة $\Gamma^{-1} : \prod_{i\in I}\mathcal{L}(X,A_i) \to \mathcal{L}(X,A)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "w_i"'] & A \arrow[d, "u_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

$$\Gamma^{-1}((w_i)_{i\in I}) = \alpha$$

حيث $\forall i\in I : u_i\circ\alpha = w_i$

إن Γ^{-1} تطبيق.

إن $\Gamma\circ\Gamma^{-1}$ es Ids

هون مجرد رمز بس أثبت أنه تقابلي نطلع معكوس

لدينا $\Gamma\circ\Gamma^{-1} : \prod\mathcal{L}(X,A_i) \to \prod\mathcal{L}(X,A_i)$

$$\forall (w_i)_{i\in I} \in \prod \mathcal{L}(X,A_i) ; \Gamma\circ\Gamma^{-1}((w_i)_{i\in I}) = \Gamma(\Gamma^{-1}((w_i)_{i\in I}))$$

$$= \Gamma(\alpha) = (u_i\circ\alpha)_{i\in I} = (w_i)_{i\in I}$$ صورة التطبيق نفسه وهو تطبيق مطابق

ومنه نجد أن $\boxed{\Gamma\circ\Gamma^{-1} = I_{\prod_{i\in I}\mathcal{L}(X,A_i)}}$

الموضوع :

التاريخ :   /   /

$$\Gamma^{-1}\circ\Gamma : \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,A)$$

$\forall \sigma \in \mathcal{L}(X,A)$ ؛ $\Gamma^{-1}\circ\Gamma(\sigma) = \Gamma^{-1}(\Gamma(\sigma)) = \Gamma^{-1}((u_i\circ\sigma)_{i\in I}) = \sigma$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma^{-1}\circ\Gamma = I_{\mathcal{L}(X,A)}}$$

وبالتالي التطبيق Γ متباين وغامر

② ⇐ ① : لنفرض أن Γ متباين وغامر.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "v_i"'] & A \arrow[d, "u_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

لتكن $(v_i : B \longrightarrow A_i)_{i\in I}$ أسرة من المورفيزمات للفئة $\mathcal{L}$

لأجل $X = B$ نجد أن $(v_i)_{i\in I} \in \prod \mathcal{L}(B,A_i)$

ولما كان Γ غامر يوجد $\alpha \in \mathcal{L}(B,A)$ تحقق $\Gamma(\alpha) = (v_i)_{i\in I}$

$$\Rightarrow (u_i\circ\alpha)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$$

لنفرض أنه يوجد مورفيزم $\delta : B \longrightarrow A$ تحقق $(u_i\circ\delta)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$

$$\Gamma(\delta) = (v_i)_{i\in I} = \Gamma(\alpha) \underset{\Gamma \text{ متباين}}{\Longrightarrow} \delta = \alpha$$

وهذا يبين أن الثنائية $(A,(u_i)_{i\in I})$ هي جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

مبرهنة:

لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$. لنفرض أن كلاً من $(A,(u_i : A \longrightarrow A_i)_{i\in I})$ و $(A',(v_i : A' \longrightarrow A_i)_{i\in I})$ هو جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ عندئذٍ يوجد ايزومورفيزم $\alpha : A \longrightarrow A'$

البرهان: لما كانت الثنائية $(A,(u_i)_{i\in I})$ جداء الأسرة $(A_i)_{i\in I}$ فإنه لأجل أسرة المورفيزمات $v_i : A' \longrightarrow A_i$ يوجد مورفيزم وحيد $\beta : A' \longrightarrow A$

$$u_i\circ\beta = v_i \quad \forall i\in I$$

ولما كانت الثنائية $(A',(v_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ فإنه لأجل أسرة المورفيزمات $(u_i : A \longrightarrow A_i)_{i\in I}$ يوجد مورفيزم وحيد $\alpha : A \longrightarrow A'$ بحيث $\forall i\in I$ فإن

$$v_i\circ\alpha = u_i$$

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "v_i"'] & A \arrow[d, "u_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\alpha\circ\beta", "I_{A'}"'] \arrow[dr, "v_i"'] & A' \arrow[d, "v_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

$$\alpha\circ\beta : A' \longrightarrow A'$$

$$\beta\circ\alpha : A \longrightarrow A$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha", "\cancel{I_A}"'] \arrow[dr, "u_i"'] & A' \arrow[d, "v_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

$$v_i\circ(\alpha\circ\beta) = (v_i\circ\alpha)\circ\beta = u_i\circ\beta = v_i$$

وحسب التعريف نجد أن $\alpha\circ\beta = I_{A'}$

التاريخ : / /

الموضوع :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\beta.\alpha"] \arrow[rr, phantom, shift right=2, "I_A"] \arrow[dr, "u_i"'] & & A \arrow[dl, "u_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

$u_i.(\beta.\alpha) = (u_i.\beta).\alpha = v_i.\alpha = u_i$

وحسب التعريف $\beta.\alpha = I_A$

وعليه فإن α إيزومورفيزم

مبرهنة: لتكن ℓ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة ℓ. إذا كانت الثنائية $(A,(\pi_i : A \to A_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ عندئذٍ

١- لأجل كل $i\in I$ يوجد مورفيزم $\alpha_i : A_i \to A$ تحقق:

$\pi_i.\alpha_i = I_{A_i}$ $\forall i\in I$

٢- لأجل كل $i\in I$ المورفيزم π_i ابيمورفيزم

البرهان: ١- لما كانت الثنائية $(A,(\pi_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ فإنه لأجل كل $X\in Ob(\ell)$ والتطبيق $\Gamma : \ell(X,A) \to \prod_{j\in I}\ell(X,A_j)$ متباين وغامر

لنفرض $\Gamma_i : \prod_{j\in I}\ell(X,A_j) \to \ell(X,A_i)$ $\Gamma_i((w_j)_{j\in I}) = w_i$

هو التطبيق الغامر المعرف بالشكل

وعليه التطبيق

$\Gamma_i.\Gamma : \ell(X,A) \to \ell(X,A_i)$ غامر

ولأجل $X = A_i$ نجد أن التطبيق $\Gamma_i.\Gamma : \ell(A_i,A) \to \ell(A_i,A_i)$ غامر ولما كانت

$I_{A_i} \in \ell(A_i,A_i)$ يوجد $\alpha_i : A_i \to A$

تحقق $\Gamma_i.\Gamma(\alpha_i) = I_{A_i}$

$I_{A_i} = \Gamma_i.\Gamma(\alpha_i) = \Gamma_i(\Gamma(\alpha_i)) = \Gamma_i((\pi_j.\alpha_i)_{j\in I}) = \pi_i.\alpha_i$ ~~$= (\pi_i.\lambda)_{i\in I} = \pi_i.\alpha_i$~~

$\Gamma(\lambda) = (\pi_i.\lambda)_{i\in I}$

٢- $\pi_i : A \to A_i$ ابيمورفيزم

علماً أن $\pi_i.\alpha_i = I_{A_i}$ $\forall i\in I$

بما أن I_{A_i} ابيمورفيزم $\Leftarrow$ π_i ابيمورفيزم لأن A_i مستقرها

وبما أن I_{A_i} مونومورفيزم $\Leftarrow$ α_i مونومورفيزم A_i منطلقها

المجموع

تعريف: لتكن $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة ℓ، نقول عن الثنائية $(A,(u_i:A_i\to A)_{i\in I})$ حيث $A\in ob(\ell)$ أنها مجموع للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ إذا كان لأجل أي أسرة $(v_i:A_i\to B)_{i\in I}$ من مورفيزمات الفئة، يوجد مورفيزم وحيد $\alpha:A\to B$ تحقق: $\alpha\cdot u_i=v_i$ حيث $i\in I$

$$\begin{tikzcd} B & & A \arrow[ll, "\alpha"'] \\ & A_i \arrow[ul, "v"] \arrow[ur, "u_i"'] & \end{tikzcd}$$

مبرهنة:

لتكن ℓ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة ℓ .

الشروط التالية متكافئة:

1_ الثنائية $(A,(u_i:A_i\to A)_{i\in I})$ هي مجموع للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

2_ لأجل كل $X\in ob(\ell)$ فإن التطبيق: $\Gamma:\ell(A,X)\to\prod_{i\in I}\ell(A_i,X)$

$\Gamma(\lambda)=(\lambda\cdot u_i)_{i\in I}$ متباين وغامر.

البرهان: $1\to 2$: واضح أن Γ تطبيق.

لنعرف علاقة $\Gamma^{-1}:\pi\,\ell(A_i,X)\to\ell(A,X)$ حيث $\Gamma^{-1}((w_i)_{i\in I})=\alpha$

وذلك حيث $\alpha\cdot u_i=w_i$ حيث $\forall i\in I$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\alpha"] & & X \\ & A_i \arrow[ul, "u_i"] \arrow[ur, "w_i"'] & \end{tikzcd} \Longrightarrow$$

$*\ \Gamma\cdot\Gamma^{-1}:\pi\,\ell(A_i,X)\to\pi\,\ell(A_i,X)$

$\Gamma\cdot\Gamma^{-1}((w_i)_{i\in I})=\Gamma(\Gamma^{-1}(w_i)_{i\in I})=\Gamma(\alpha)=(\alpha\cdot u_i)_{i\in I}$

$=(w_i)_{i\in I}$

$\Rightarrow\Gamma\cdot\Gamma^{-1}=I_{\pi(A_i,X)}$

$\forall\lambda\in\ell(A,X)$, $\Gamma^{-1}\Gamma(\lambda)=\Gamma^{-1}(\Gamma(\lambda))=\Gamma^{-1}((\lambda\cdot u_i)_{i\in I})=\lambda$

$\Rightarrow\Gamma^{-1}\Gamma=I_{\ell(A,X)}$

ومنه فإن التطبيق Γ متباين وغامر.

$2\to 1$: لتكن $(v_i:A_i\to X)_{i\in I}$ أسرة من مورفيزمات الفئة ℓ . عندئذٍ

$(v_i)_{i\in I}\in\pi\,\ell(A_i,X)$ ولما كان Γ غامر يوجد $\alpha\in\ell(A,X)$ بحيث:

$\Gamma(\alpha)=(v_i)_{i\in I}$, $\Gamma(\alpha)=(\alpha\cdot u_i)_{i\in I}$ و $(\alpha\cdot u_i)_{i\in I}=(v_i)_{i\in I}$

و بالتالي فإن المخطط تبديلي

$*$ ليكن $\beta\in\ell(A,X)$ بحيث: $(\beta\cdot u_i)_{i\in I}=(v_i)_{i\in I}$

$\Gamma(\beta)=(\beta\cdot u_i)_{i\in I}=(v_i)_{i\in I}=\Gamma(\alpha)$

$\Rightarrow\alpha=\beta$ وبالتالي $(A,(u_i)_{i\in I})$ مجموع

التاريخ: / /

الموضوع:

مبرهنة:

لتكن ℓ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة ℓ، لنفرض الثنائيتين

$(A, (u_i : A_i \to A)_{i\in I})$ و $(B, (v_i : A_i \to B)_{i\in I})$ كل منهما مجموع للأسرة

$(A_i)_{i\in I}$ عندئذٍ يوجد إيزومورفيزم $\alpha : A \to B$.

البرهان:

• لما كانت الثنائية $(A, (u_i)_{i\in I})$ مجموع للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد

$\alpha : A \to B$ بحيث $\alpha . u_i = v_i \; ; \forall i\in I$

• لما كانت الثنائية $(B, (v_i)_{i\in I})$ مجموع للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ فإنه يوجد مورفيزم وحيد $\beta : B \to A$

بحيث $\beta . v_i = u_i \; ; \forall i\in I$

* من جهة أخرى، لأجل كل $i\in I$ فإن

$\cdot u_i = \beta . v_i = \beta . (\alpha . u_i) = (\beta . \alpha) u_i \Rightarrow$ ومنه فإن $\beta . \alpha = I_A$

$\cdot \forall i\in I : v_i = \alpha . u_i = \alpha . (\beta . v_i) = (\alpha . \beta) . v_i \Rightarrow$ ومنه $\alpha . \beta = I_B$

أي أن α ايزومورفيزم

مبرهنة:

لتكن ℓ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة ℓ، إذا كانت الثنائية $(A, (z_i : A_i \to A)_{i\in I})$

مجموع للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ عندئذٍ:

1- لأجل كل $i\in I$ يوجد مورفيزم $\alpha_i : A \to A_i$ بحيث $\alpha_i . z_i = I_{A_i}$

2- لأجل كل $i\in I$ المورفيزم $z_i : A_i \to A$ مونومورفيزم (مونومورفيزم الاحتواء).

البرهان:

1- لما كانت الثنائية $(A, (z_i)_{i\in I})$ مجموع للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ فإن التطبيق

$\Gamma : \ell(A, X) \to \prod_{k\in I} \ell(A_k, X)$ متباين وغامر.

لنفرض أن

$\Gamma_i : \pi\, \ell(A_k, X) \to \ell(A_i, X)$ التطبيق المعرف بالشكل:

$\Gamma_i((\theta_k)_{k\in I}) = v_i$

ومنه فإن:

$\Gamma_i . \Gamma : \ell(A, X) \to \ell(A_i, X)$

ومنه فإن التطبيق غامر، لأجل $X = A_i$ نجد أن $I_{A_i} \in \ell(A_i, A_i)$

الموضوع: .... التاريخ: / /

و بالتالي يوجد عنصر في المنطلق $\alpha_i : A \to A_i$ حيث $\Gamma_i \circ \Gamma(\alpha_i) = I_{A_i}$

$$\Gamma_i \circ \Gamma(\alpha_i) = \Gamma_i(\Gamma(\alpha_i)) = \Gamma_i((\alpha_i \circ \mathcal{I}_K)_{K \in I}) = \alpha_i \circ \mathcal{I}_i = I_{A_i}$$

ج- وظيفة

النواة:

تعريف:

لتكن ℓ فئة و $u_1, u_2 : A \to B$ مورفيزمين للفئة ℓ، ولنفرض أن $f : N \to A$ مورفيزم للفئة ℓ، نقول أن الثنائية (N, f) نواة للمورفيزمين u_1, u_2 إذا تحقق:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] & A \\ X \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

1- لأجل كل $X \in ob(\ell)$ ولأجل كل مورفيزم $\lambda : X \to A$ تحقق $u_1 \circ \lambda = u_2 \circ \lambda$

يوجد مورفيزم وحيد $\alpha : X \to N$ تحقق $f \circ \alpha = \lambda$

2- إذا كان لأجل كل $X \in ob(\ell)$ ولأجل كل مورفيزم $\lambda : X \to A$ يوجد مورفيزم $\alpha : X \to N$ حيث $f \circ \alpha = \lambda$ فإن

$u_1 \circ \lambda = u_2 \circ \lambda$