المحاضرة السادسة عشر والأخيرة 13/5/2019

عنوان المحاضرة: نشر التوابع و بعض التعاريف و التمارين

- سنتابع في نشر التوابع ونأخذ التمارين التالية

تمرين:

انشر وفقه ماك لوران التوابع التالية وبين ما هو أوسع قرص يكون فيه النشر صحيحاً

① $f(z) = \frac{1}{1-z}$, ② $g(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$, ③ $h(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$

الحل:

$\boxed{1}$ $f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ من أجل

هو مجموع لسلسلة هندسية هي

وهو مجموع لمتسلسلة قوى فهو تحليلي على قرص تقاربها ومشتقه تمثل للمتسلسلة المشتقة

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad ; \quad |z| < 1$$

أي أن $z \in D(0,1)$ وهو تحليلي على $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

و أوسع قرص له هو قرص الواحدة

$\boxed{2}$ $$g(z) = \frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

$$\forall z \in D(0,1)$$

$\boxed{3}$ $$h(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-z)^2}\right)' = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) z^n \quad ; \quad |z| < 1$$

(١١) كل من هذه التوابع تحليلية عند الصفر ومن قابلة ~~للاشتقاق~~ للنشر وفق ماكلوران
وأوسع قرص سيكون النشر فيه صحيح هو قرص الواحدة !

مثال:

انشر وفق ماكلوران التابع $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ ثم وفق تايلور في جوار $z=1$

الحل:

$$f(z)=\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{1-(-z^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} \ ; \ |z|<1$$

مجموع لمتسلسلة هندسية اساسها $(-z^2)$

وأوسع قرص هو قرص الواحدة لأن النقاط الشاذة الغير تحليلية عنده هي $z=\mp i$ وبعد $\mp i$ عن الصفر هو 1

- للنشر وفق تايلور في جوار $z=1$ نلاحظ أن التابع تحليلي

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{(z-i)(z+i)}=\frac{A}{(z-i)}+\frac{B}{z+i}$$

وبحساب الثوابت نجد أن:

$$B=-\frac{1}{2i} \quad , \quad A=\frac{1}{2i}$$

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}\right]$$

للنشر أولاً التابع $\frac{1}{z-i}$ في جوار الـ 1

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{(z-1)+1-i}=\frac{1}{1-i}\left(\frac{1}{1+\frac{z-1}{1-i}}\right)=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{(1-i)^n}$$

و $\left|\frac{z-1}{1-i}\right|<1$

ولأن طويلة $|1-i|=\sqrt{2}$ نضرب الطرفين بـ $\sqrt{2}$ نحصل على $|z-1|<\sqrt{2}$ أي النشر صحيح في $D(1,\sqrt{2})$

$$\Rightarrow \frac{1}{z-i}=\sum\frac{(-1)^n}{(1-i)^{n+1}}(z-1)^n$$

وبنفس الاسلوب :

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-1)+i+1} = \frac{1}{1+i}\;\frac{1}{1+\frac{z-1}{1+i}}$$

$$= \frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{(1+i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{(1+i)^{n+1}}$$

وبشرط النشر $|z-1|<\sqrt{2}$

ومنه نجد :

$$f(z) = \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{(1-i)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{(1+i)^{n+1}}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\left(\frac{1}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right)$$

وهذا النشر صحيح في $D(1,\sqrt{2})$

ملاحظة :

(1)

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad , |q|<1$$

$$\frac{1}{1+q} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^n \quad ; |q|<1$$

* الهدف من النشر في جوار نقطة z_0 الحصول على متسلسلة قوى من الشكل $\sum C_n (z-z_0)^n$

لذلك عندما طلب منا النشر في جوار $z_0=1$ قمنا بإضافة وطرح واحد للمقام بهدف أن يظهر في المتسلسلة $(z-1)^n$ بـ أس تابعة لـ n

* عندما يطلب النشر يفضل أن نحاول الاستفادة من المنشورات الشهيرة بدلاً من تطبيق تعريف النشر في جوار نقطة ،

/ /

بعض التمثيلات الشهيرة بالإضافة لـ ①

* $e^{z} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ ; \forall z \in \mathbb{C}$

* $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ ; \forall z \in \mathbb{C}$

$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{(2n)!} \ ; \forall z \in \mathbb{C}$

تمرين

هل يمكن نشر $f(z) = \operatorname{Log} z$ في جوار الصفر

الجواب: لا يمكن النشر لأن $\operatorname{Log} z$ غير تحليلي عند الصفر

ولا يمكن النشر عند أي عدد حقيقي سالب لأنه فرع تحليلي عند $x \in \mathbb{R}^-$

- هل يمكن نشر عند $z = 1$ ؟

الجواب: نعم لأن $\operatorname{Log} z$ تحليلي عند الـ 1

$f'(z) = (\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{z} = \frac{1}{z-1+1}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$

الآن نكامل الطرفين للحصول على نشر، لنتائج f :

$\Rightarrow f(z) = \operatorname{Log} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^{n+1}}{n+1} + \underbrace{C}_{\text{ثابت عقدي}}$

عندما $z = 1$ يكون

$f(1) = \operatorname{Log} 1 = 0$

$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^{n+1}}{n+1} + C\right)_{\text{عند } z=1} = C$

$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(z) = \log z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^{n+1}}{n+1}$

/ /

تتمة لنتائج تايلور:

③ إذا كان f تحليليًا على محيط وداخل $\overset{+}{C}(z_0, r)$ فإن

$$\int_{\overset{+}{C}(0,1)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

مركز القرص

مشتقة من مرتبة n

تمرين:

احسب التكامل

$$\int \frac{e^{2z}}{(z-i)^3}$$

حيث i هي المركز

سنوجده وفق النتيجة السابقة

$$\int \frac{e^{2z}}{(z-i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f^{(2)}(i) = \pi i (4e^{2i}) = 4\pi i (e^{i})^2$$

حيث e^{2z} تحليلي على $\overset{+}{C}(i, \frac{3}{2})$ وداخله

إذا طلب كتابته بالشكل الجبري $= 4\pi i(\cos(i) + i\sin(i))$ = الشكل الجبري

ملاحظة: عند تطبيق هذه النتيجة يجب أن تكون الدائرة محسوبة بالاتجاه الموجب

أما لو كانت سالبة نكتب $(-\int)$ " أي نضرب بـ ناقص "

مبرهنة:

إذا f تحليلي على قرص $D(z_0, r)$ فإن لـ f تابع أصلي على ذلك القرص

الإثبات:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in D(z_0, r)$$ حسب تايلور

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} (z-z_0)^{n+1}$$ لنأخذ التابع

إن التابع F هو تابع أصلي لـ f على القرص لأن

$$F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} (n+1)(z-z_0)^n = f(z) \quad \forall z \in D(z_0, r)$$

/ /

نتيجة: إذا كان f تحليلياً على قرص $D(z_0, r)$ فإن التكامل لـ f مستقل عن الطريقة المسلوكة في ذلك القرص
وكذلك فإن التكامل لـ f على أي طريقة مغلقة في ذلك القرص سيكون صفراً.

تعريف:
لتكن G منطقة «مترابطة ومفتوحة» ولتكن Γ منحنياً مغلقاً بسيطاً في G
إذا كان Γ وداخله محتويين في G فإننا نقول أن Γ منكمش للصفر
أو لنقطة في G ونرمز لذلك بـ $\Gamma \sim 0$ في G

مثال: إن $C^+(0,1)$ ليس منكمشاً للصفر في $\mathbb{C}^*$ لوجود نقطة هي المبدأ
داخله وغير منتمية لـ $\mathbb{C}^*$ وهو منكمش للصفر في $\mathbb{C}$

تعريف:
نقول عن منطقة G أنها منطقة بسيطة الترابط إذا كان كل منحني مغلق فيها
منكمش للصفر فيها «بمعنى أن هذه المنطقة خالية من الفجوات»
تعريف مكافئ:
نقول عن منطقة G أنها بسيطة الترابط إذا كانت متممة في $\hat{\mathbb{C}}$ «المستوي العقدي الموسع»
أي $\hat{\mathbb{C}} \setminus G$ متراصة في $\hat{\mathbb{C}}$

مثال:
إن $\mathbb{C}^*$ ليست منطقة بسيطة الترابط لأن:
لأن دائرة الواحدة منحني مغلق في $\mathbb{C}^*$ وليس منكمشاً للصفر فيها لوجود المبدأ داخله
الذي لا ينتمي الى $\mathbb{C}^*$
وبتعليل مكافئ:
لأن متممة $\mathbb{C}^*$ في $\hat{\mathbb{C}}$ هو المجموعة المكونة من الصفر والـ ∞ وهي مجموعة
غير مترابطة في $\hat{\mathbb{C}}$

/ /

أمثلة:

- المستوي $\mathbb{C}$ بكامله منطقة بسيطة الترابط
- الأقراص المفتوحة هي مناطق بسيطة الترابط
- الأشرطة دون حواف هي منطقة بسيطة الترابط
- انصاف المستويات المفتوحة هي مناطق بسيطة الترابط

ملاحظة:

إن تحليلية تابع على منطقة غير كافٍ لوجود تابع أصلي لذلك التابع على تلك المنطقة

إذ أن $f(z) = \frac{1}{z}$ هو تابع مستمر على $\mathbb{C}^*$ وهو تحليلي على $\mathbb{C}^*$ ولكنه لا يملك تابع أصلي على $\mathbb{C}^*$

* إذا كان f تحليلياً على منطقة بسيطة الترابط فإن لـ f تابع أصلي على تلك المنطقة

1 هل للتابع $f(z) = \frac{1}{z}$ تابع أصلي على $\mathbb{C} \setminus 0y$ ؟

الجواب نعم.

لأن $\mathbb{C} \setminus 0y$ منطقة بسيطة الترابط حيث أن أي منحني مغلق فيها يكون هو وداخله محتويين فيها

ولأن $f(z) = \frac{1}{z}$ تحليلي على هذه المنطقة وحسب مبرهنة لـ f تابع أصلي على هذه المنطقة

2 هل للتابع $f(z) = \frac{\sin z}{z^2+9}$ ت. أ. أصلي على الشريط $-3 < Im z < 3$

الجواب نعم

لأن التابع تحليلي على الشريط حيث $-3i$ و $+3i$ نقطتين غير منتميتين للشريط كما أن الشريط منطقة بسيطة الترابط لأن كل منحنٍ مغلق منه هو وداخله محتويين في الشريط

1) احسب $\int_{C(0,\frac{1}{2})} \frac{\sin z}{z^2+9}$

إن هذا التكامل يساوي الصفر لأن التابع المكامل $\frac{\sin z}{z^2+9}$ تحليلي على الشريط G . لأن هذا الشريط منطقة بسيطة الترابط

كما أن الطريق $C(0,\frac{1}{2})$ طريق مغلق في ذلك الشريط

ملاحظة:

لو بدلنا $C(0,\frac{1}{2})$ بـ $C(0,1)$ فإن f تحليلي على محيط وداخل $C(0,1)$

والطريق مغلق فالتكامل معدوم

تعريف:

ليكن Γ_1 ، Γ_2 منحنيين مغلقين أحدهما يقع داخل الآخر ولهما الاتجاه ذاته وعدد مرات المسح ذاته والمنطقة المحصورة بينهما مع المنحنيين محتواة في منطقة G عندئذ

نقول أن Γ_2 مشوه لـ Γ_1 في المنطقة G ونرمز لذلك بـ $\Gamma_2 \sim \Gamma_1$ في G

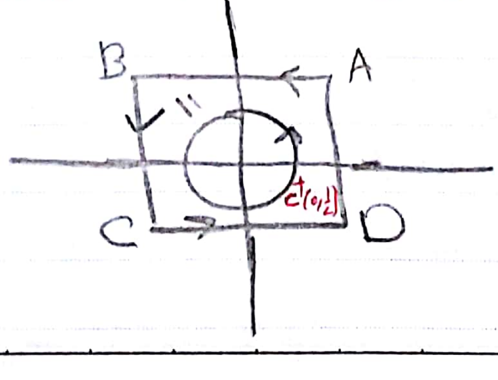
مبرهنة:

إذا كان f تحليلياً على منطقة G وكان $\Gamma_2 \sim \Gamma_1$ في G فإن

$$\int_{\Gamma_1} f = \int_{\Gamma_2} f$$

سؤال: احسب التكامل $\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz$ على المربع حيث Γ مربع رؤوسه

$A(1+i)$, $B(-1+i)$, $C(-1-i)$, $D(1-i)$



/ /

إن $f(z) = \frac{1}{z}$ تحليلي على $\mathbb{C}^*$ و $C^+(0,\frac{1}{2})$ مشوه لـ Γ في $\mathbb{C}^*$
لأن المنحنيين $C^+(0,\frac{1}{2})$ و Γ والمنطقة المحصورة بينهما محتواة في $\mathbb{C}^*$
أي وحسب المبرهنة

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z}\, dz = \int_{C^+(0,\frac{1}{2})} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$$

لا حيث أن الدائرة والمربع بالجهة ذاتها ولهما نفس عدد مرات المسح (مرة واحدة)

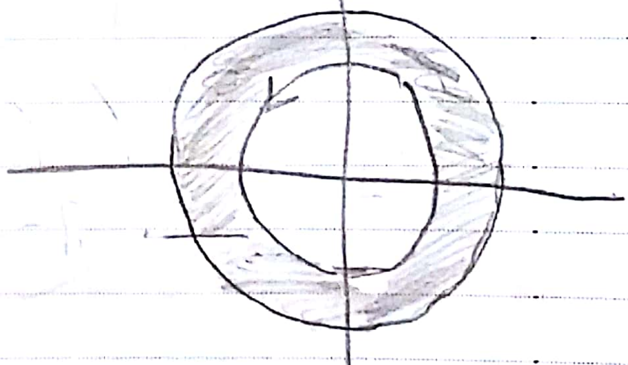
① اثبت أن التكامل $\int \frac{1}{z}\, dz$ على أي منحنٍ مغلق يحوي بداخله المبدأ يساوي هو $2\pi i$

② وأن التكامل لهذا التابع على أي منحنٍ مغلق لا يحوي بداخله المبدأ سيكون معدوماً

الحل:

① لنفرض أن Γ ممسوح بالاتجاه الموجب مرة واحدة ولتكن $\Gamma_1 = C^+(0,r)$ حيث $r>0$ صغير كفاية حتى يكون Γ_1 داخل Γ وبما أن $\Gamma \sim \Gamma_1$ في $\mathbb{C}^*$
وأن التابع المكامل $f(z) = \frac{1}{z}$ تحليلي على $\mathbb{C}^*$ التي تحوي Γ_1 و Γ
المنطقة المحصورة بينهما بالتالي وحسب مبرهنة

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z}\, dz = \int_{C^+(0,1)} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}}\, ire^{it}\, dt = \boxed{2\pi i}$$



② لتكن c منحنٍ بسيط بداية المبدأ أو يذهب إلى اللانهاية ودون أن تقطع منحني Γ
ان $\mathbb{C} \setminus c = G$ منطقة بسيطة الترابط وبما أن التابع $\frac{1}{z}$ تحليلي على المنطقة
فإن لـ $\frac{1}{z}$ تابع أصلي على هذه المنطقة والتكامل على المنحني المغلق
وهو منحنٍ عليه سيكون معدوماً.

/ /

مبرهنة :

(3) . كان f تحليلي على محيط وداخل منحني مغلق Γ ممسوح مرة واحدة بالاتجاه الموجب فإن

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0) \;;\; \forall z_0 \in \Gamma \text{ داخل}$$

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad \forall z_0 \in \Gamma \text{ داخل}$$

وهذه العلاقات تدعى صيغ كوشي التكاملية المعممة

تمرين :

احسب التكامل $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2(z+i)}$

لو كان مربع أو مستطيل نفس الحل بيكون

1- $\Gamma_1 = C^+(0, \frac{1}{2})$

2- $\Gamma_2 = C(-i, \frac{1}{4})$

3- $\Gamma_3 = C^+(1, \frac{3}{4})$

الحل

1) $$\int_{C^+(0,\frac{1}{2})} \frac{\sin z}{z^2(z+i)}\, dz = \int_{C^+(0,\frac{1}{2})} \frac{\frac{\sin z}{z+i}}{(z-0)^{2=1+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{1!} f_1'(0)$$

ان التابع $f(z) = \frac{\sin z}{z+i}$ تحليلي على محيط وداخل $C^+(0, \frac{1}{2})$

$$\Rightarrow f_1'(z) = 2\pi i \left(\frac{\cos(z+i) - \sin z}{(z+i)^2} \right)_{\text{حيث } z=0} = 2\pi i \left(\frac{i}{i^2} \right) = 2\pi$$

$\boxed{2}$ $$\int_{C^+(-i,\frac{1}{4})} \frac{\sin z}{z^2(z+i)} = \int \frac{\frac{\sin z}{z^2}}{z-(-i)}\, dz$$

ان التابع $f_2(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ هو تحليلي على محيط وداخل $C^+(-i, \frac{1}{4})$ وحسب المبرهنة

$$= 2\pi i \left(\frac{\sin z}{z^2} \right)_{z=-i}$$

$$= -2\pi i \sin(-i) = 2\pi i \sin i \Rightarrow \int_{C(-i,\frac{1}{4})} = -2\pi i \sin i$$

$\boxed{3}$ التابع تحليلي على $\mathbb{C} \setminus \{0, -i\}$ والمنحني $C^{+}(1, \frac{3}{4})$ وداخله محتوى في $\mathbb{C} \setminus \{0, -i\}$

أي: $C^{+}(b, \frac{3}{4})$ مشوه للصفر في هذه المنطقة

ومنه وحسب مبرهنة: اذا كان f تحليلياً على منطقة وكان γ منحنياً مشوه للصفر في تلك المنطقة فان التكامل لـ f يساوي الصفر

$$\int_{C^{+}(1, \frac{3}{4})} \frac{\sin z}{z^2 (z+i)} dz = 0$$

انتهت المحاضرة الأخيرة

بذلك نكون قد انتهينا من مقرر التحليل العقدي 2
نرجو أن نكون قد وفقنا بتقديم هذا المقرر بأسلوب سهل وواضح

اعداد: كمال الرفاعي هالة مصطفى