المحاضرة الثانية عشر.   23 / 4 / 2019

المحتوى العلمي :

قامت الدكتورة بحل تمرين الوظيفة وتمارين عن العلاقات مأخوذة من مرجعين ثم دخلت بموضوع التجزئة ..

حل الوظيفة (في المحاضرة السابقة):

أثبت أنه إذا كانت R, S علاقتين على المجموعة X فإن :

$$(S\circ R)^{-1} = R^{-1}\circ S^{-1}$$

الحل : $\forall x,y \in X \quad , (x,y) \in (G_S\circ G_R)^{-1}$

$$\Rightarrow (y,x) \in (G_S\circ G_R)$$

$$\Rightarrow \exists z \in X \; ; (y,z) \in G_R \wedge (z,x) \in G_S$$

$$\Rightarrow (z,y) G_R^{-1} \wedge (x,z) \in G_S^{-1}$$

$$(x,z) \in G_S^{-1} \wedge (z,y) \in G_R^{-1}$$

$$\Rightarrow (x,y) \in G_R^{-1}\circ G_S^{-1}$$

$$(G_S\circ G_R)^{-1} \subseteq G_R^{-1}\circ G_S^{-1}$$

$$(S\circ R)^{-1} \subseteq R^{-1}\circ S^{-1}$$

وبالعكس : $(x,y) \in G_R^{-1}\circ G_S^{-1}$

$$\Rightarrow \exists w \in X \quad , (x,w) \in G_S^{-1} \wedge (w,y) \in G_R^{-1}$$

$$\Rightarrow (w,x) \in G_S \wedge (y,w) \in G_R$$

$$(y,x) \in G_S\circ G_R$$

$$(x,y) \in (G_S\circ G_R)^{-1}$$

$$G_R^{-1}\circ G_S^{-1} \subseteq (G_S\circ G_R)^{-1}$$

$$R^{-1}\circ S^{-1} \subseteq (S\circ R)^{-1} \quad \Rightarrow (S\circ R)^{-1} = R^{-1}\circ S^{-1}$$

تمرين : أثبت أن تركيب العلاقات عملية تجميعية ؟؟..

الحل :

لتكن لدينا العلاقات R, S, T لنثبت أن

$$(T\circ S)\circ R = T\circ (S\circ R)$$

لنأخذ $(T\circ S)\circ R$ وليكن $x,y \in X$ بحيث :

$(x,y) \in (G_T \circ G_S) \circ G_R$

$\Rightarrow \exists z \in X : (x,z) \in G_R \wedge (z,y) \in (G_T \circ G_S)$

$\Rightarrow \exists w \in X : (x,z) \in G_R \wedge [(z,w) \in G_S \wedge (w,y) \in G_T]$

$\Rightarrow (x,w) \in (G_S \circ G_R) \wedge (w,y) \in G_T$

$\Rightarrow (x,y) \in G_T \circ (G_S \circ G_R)$

$\Rightarrow (T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$

لنثبت الاحتواء الآخر:

نأخذ $T \circ (S \circ R)$ ونكتب:

$(x,y) \in G_T \circ (G_S \circ G_R)$

$\exists z \in X : (x,z) \in (G_S \circ G_R) \wedge (z,y) \in G_T$

$\Rightarrow \exists w \in X : (x,w) \in G_R \wedge (w,z) \in G_S \wedge (z,y) \in G_T$

$\Rightarrow (x,w) \in G_R \wedge (w,y) \in G_T \circ G_S$

$(x,y) \in (G_T \circ G_S) \circ G_R$

$\Rightarrow G_T \circ (G_S \circ G_R) \subseteq (G_T \circ G_S) \circ G_R$

$\Leftarrow$

$T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$

$\Leftarrow$ من الاحتوائين:

$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$

تمرين: اثبت أنه إذا كانت R علاقة تكافؤ في X فإن:

$R \circ R = R$

الحل: لنأخذ: $(x,y) \in G_R \circ G_R$

$\exists z \in X : (x,z) \in G_R \wedge (z,y) \in G_R$

متعدية $R \Rightarrow (x,y) \in G_R$

$\Rightarrow G_R \circ G_R \subseteq G_R$

$\Rightarrow R \circ R \subseteq R$

العكس: لتكن $x,y \in X \Leftarrow (x,y) \in G_R$

انعكاسية

$\Rightarrow (x,x) \in G_R$

$(x,x) \in G_R \wedge (x,y) \in G_R$

$(x,y) \in G_R \circ G_R \Rightarrow G_R \subseteq G_R \circ G_R$

/ /

$$\Rightarrow R \subseteq R \circ R$$

ومن الاحتواءين نجد أن: $R = R \circ R$

مبرهنة: إذا كانت R, S, T ثلاث علاقات في المجموعة X فإن:

1- $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$

: توزيع التركيب في الاجتماع من اليمين.

2- $(S \cap T) \circ R = (S \circ R) \cap (T \circ R)$

توزيع التركيب في التقاطع من اليمين.

3- إذا كانت $R \subseteq S$ فإن:

$$T \circ R \subseteq T \circ S$$

و $R \circ T \subseteq S \circ T$

التركيب يحافظ على الاحتواء من اليمين أو من اليسار.

4- إذا كان: $(S \circ R) \cap T = \phi$

$$\Rightarrow (T \circ R^{-1}) \cap S = \phi$$

مبرهنة: $[x] = \{y \in X : (x,y) \in G_R\}$

لتكن R علاقة تكافؤ في $X \neq \phi$ عندئذ: 1- $x \in [x]$

2- إذا كان $y \in [x]$ فإن $[x] = [y]$

3- $[x] = [y]$ فإن $(x,y) \in G_R$

4- إذا كان $[x] \cap [y] \neq \phi$ فإن $[x] = [y]$

التجزئة:

لتكن X مجموعة غير خالية نسمي التجزئة لمجموعة X أي جماعة من المجموعات الجزئية غير الخالية في X والمنفصلة مثنى مثنى والتي اجتماعها يساوي X.

أي أنه أسرة المجموعات.

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

تشكل تجزئة لمجموعة X إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

1- $\forall i = 1, \ldots, n \quad ; \quad A_i \neq \phi$

$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad : \quad A_i \cap A_j = \phi$ -2

$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = X$ -3

مثال:

$X = \{a, b, c\}$

R علاقة X حيث:

$G = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b), (c,c)\}$

$[a] = [a,b]$

$[b] = \{a,b\}$

$[c] = \{c\}$

ملاحظة:

لتكن X مجموعة غير خالية عندئذ:

1. إذا كانت X مزودة بعلاقة تكافؤ R فإن:

$X/R = \{[x] \; ; \; x \in X\}$

تشكل تجزئة للمجموعة X.

2. من أجل كل تجزئة $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ للمجموعة X فإنه توجد علاقة وحيدة R تحقق:

$X/R = \{A_i \; ; \; i = 1, \dots, n\}$

أو $\{A_i \; : \; i \in I\}$

$X/R = \{A_i \; ; \; i \in I\}$.