المحاضرة ١٤

8/5/2019

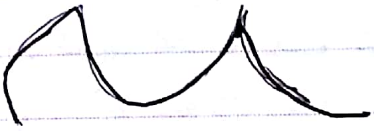
عنوان المحاضرة "المنحني الأملس قطعياً" وتكامل تابع عقدي

نقول عن منحنٍ Γ أنه أملس قطعياً إذا كان Γ مجموعاً منتهياً لعدد من المنحنيات الملساء أي إذا كان

$$\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \dots \oplus \Gamma_n$$

حيث $i = 1, \dots, n$ ؛ Γ_i

أملس قطعياً



1) كل منحنٍ أملس هو منحنٍ أملس قطعياً (لأنه مكون من قطعة واحدة ملساء) والعكس غير صحيح بالضرورة

2) أمثلة على العكس غير صحيح

- الدائرة المرسومة مرتين أول دورة هي منحنٍ أملس أما الدورة الثانية فمجموعهما تصبح منحنياً أملس قطعياً
- المضلعات منحنيات ملساء قطعياً وليست ملساء فالمثلث هو منحنٍ أملس قطعياً لأنه مكون من ثلاث قطع ملساء وهي القطع المستقيمة وأثبتنا سابقاً أن كل قطعة مستقيمة هي منحنٍ أملس

فلو ~~مسحنا~~ المثلث مرة واحدة فسيكون المثلث مكون من ثلاث قطع ملساء وبالتالي سيكون أملس. وأيضاً المستطيل والمربع والخط المنكسر (مكون من عدد منتهٍ من القطع المستقيمة) هي ملساء ~~لكن لو مسحنا كثير مرة~~ قطعياً

تعريف:

- نقول عن تابع عقدي $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ أنه مقيس أو قابل للقياس أو طرقي إذا كان γ ذات تغير محدود (أي أن كل من الجزئين الحقيقي والتخيلي له ~~تابع~~ ذات تغير محدود)

يسمى التغير الكلي للتابع γ في هذه الحالة بطول γ ونرمز له $L(\gamma)$

/ /

- نقول لمنحني Γ انه طريقة إذا كان نقطة أو كان أحد تمثيلاته الوسيطية γ طريقاً
ونعرف طول هذا المنحني بـ المساواة $\ell(\Gamma) = \ell(\gamma)$

مبرهنة:

إذا كان Γ منحنياً أملساً فإن Γ طريقة وإذا كان $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ طريقاً يمثل Γ فإن

$$\ell(\Gamma) = \ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

(لإذا كان المنحني أملس بالتالي فالمشتق مستمر للمشتق " ويمكننا أن نعرف (t) لأنه مستمر على $[a,b]$
((أي تابع مستمر على مجال مغلق سيكون محدوداً وله تابع أصلي على ذلك المجال))

- وهذا التكامل له قيمة وهذه القيمة هي طول المنحني Γ الممثل بـ γ

تعريف:

Γ أملس قطعياً $\Longleftarrow$ Γ طريقة فإذا كان

$$\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \dots \oplus \Gamma_n$$

فإن

$$\ell(\Gamma) = \ell(\Gamma_1) + \ell(\Gamma_2) + \dots \ell(\Gamma_n)$$

تكامل تابع عقدي لِ متحول عقدي:

لنكن f تابعاً عقدياً معرفاً على المجموعة المفتوحة A محتواة في $\mathbb{C}$ ولنكن Γ طريقاً في A
((إذا لم يمثل فهذا المنحنى سيكون في المجموعة A))
بحيث يكون f محدوداً على Γ أي يوجد عدد $M > 0$ تتحقق من أجله

$$|f(z)| \leq M \; ; \; \forall z \in \Gamma$$

طريق

/ /

وليكن $\mathbb{C} \leftarrow [a,b] : \gamma$ طريقاً تمثيل Γ عندئذ فإن f تكمول الاحايل المكافئة ،
على Γ $\Longleftrightarrow$ $f \circ \gamma$ تكمول بالنسبة لـ γ
وهنا نعرف

$$\int_{\Gamma} f = \int_a^b f \circ \gamma \, d\gamma$$

وهو تابع عقدي لمتحول حقيقي

حالة خاصة : هامة

إذا كان f مستمر على A وكان Γ منحنياً أملساً في A عندئذ f تكمول على Γ
وإن

$$\int_{\Gamma} f = \int_{\gamma} f = \int f(\gamma(t)) \, \gamma'(t) \, dt$$ وهذه العلاقة مهمة

ملاحظة :

يمكن التعميم من أجل Γ أملس قطعياً و f مستمر قطعياً « $f \circ \gamma$ » مستمر قطعياً
والتابع المستمر قطعياً هو تابع له عدد منته من نقاط الانقطاع من النوع الأول (أي التابع
غير مستمر وقد تكون سبب الانقطاع أن التابع غير معرف أو أن النهاية غير موجودة لأن النهاية من اليمين
لا تساوي النهاية من اليسار)

القفزة : هي حاصل طرح القيمة الكبرى ناقص القيمة الصغرى فالقفزة هنا هي
قفزة منتهية
أما لو كانت النهاية من اليمين ∞ أو من اليسار ∞ « على الأقل واحدة ∞ »
فإن نقطة الانقطاع ستكون من النوع الثاني

تمرين: هل التابع $f(z)=\frac{1}{z}$ كمول على دائرة الواحدة في حال الإيجاب احسب التكامل

$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{z}\,dz$$

الحل: نعم

لأنه بما أنه لم يذكر عدد مرات المسح أو اتجاه الدوران فإنه ممسوح دورة واحدة بالاتجاه الموجب "

لأن $f(z)=\frac{1}{z}$ مستمر على $\mathbb{C}^*$

لأن $C^+(0,1) \subset \mathbb{C}^*$ هي منحني أملس وقد أثبتنا ذلك سابقاً " بالتالي وحسب المبرهنة فإن f كمول على $C^+(0,1)$

لأن $\gamma(t)=e^{it}$; $0\le t\le 2\pi$ طريقة أملس تمثيل الدائرة $C^+(0,1)$ بالتالي التكامل على هذه الدائرة هو

$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{z}\,dz = \int_{a=0}^{b=2\pi} \underbrace{\frac{1}{\gamma(t)}}_{f(\gamma(t))} \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{it}}\cdot i e^{it}\,dt$$

$$= i[t]_0^{2\pi} = 2\pi i$$

تمرين: احسب التكامل $\int_\Gamma \bar z\, dz$ حيث Γ هو نصف دائرة الواحدة العلوي من 1 الى -1

الحل: لأن $\bar z$ مستمر على $\mathbb{C}$ ونصف الدائرة العلوي هو منحني أملس بالتالي $\bar z$ كمول على Γ

لنبين: أن ممثل المنحني Γ هو التابع $\gamma(t)=e^{it}$ حيث $0\le t\le\pi$ وهو طريقة أملس تمثيل Γ.

حيث من الواضح أن $\gamma(0)=1$ ، $\gamma(\pi)=-1$

$$\int_\Gamma \bar z\, dz = \int_0^\pi \overline{\gamma(t)}\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^\pi e^{-it}\cdot i e^{it}\,dt = i\int_0^\pi dt$$

$$= i\pi$$

مطلوب حفظ التمثيلات المشهورة التي ذكرناها في المحاضرة السابقة

خواص التكامل العقدي :

1. $\int_\Gamma f+g = \int_\Gamma f + \int_\Gamma g$

2. $\int_\Gamma \alpha f = \alpha \int_\Gamma f$

ثابت عقدي

3. $\int_{\Gamma^-} f = -\int_\Gamma f$

حيث Γ^- هو المنحني Γ لكن ممسوحاً بالاتجاه ~~المعاكس~~ المعاكس لجهة Γ

4. $\int_{\Gamma} f = \int_{\Gamma_1} f + \int_{\Gamma_2} f$

$\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$

تمرين

احسب التكامل $\int_{\Gamma_K} f(z)\,dz$ حيث $f(z) = (y-x)^2 + i\,3x^2$

وذلك $\Gamma_1 = [OA],\ \Gamma_2 = [OB],\ \Gamma_3 = O\overset{\Delta}{A}B,\ \Gamma_4 = [OA] \oplus [OB]$

وأن $A = i$, $B = 1+2i$

ثم قارن بين التكامل $\int_{\Gamma_2} f$, $\int_{\Gamma_4} f$ ماذا تستنتج

الحل :

إن التابع المعقد مستمر على $\mathbb{C}$ وهو تابع كثير حدود بمتحولين والقطع المستقيمة جميعها منحنيات ملساء، فهو كمول على هذه القطع

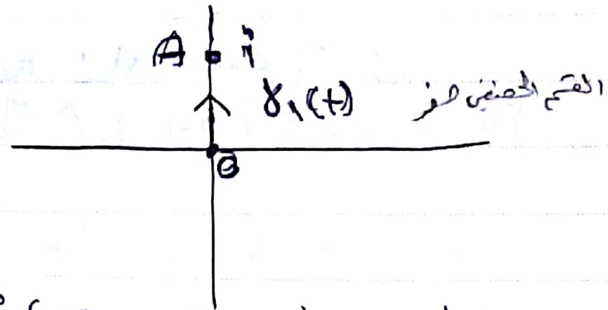
" إذا كان لدينا قطعة مستقيمة AB وكان لدينا z_a العدد العقدي المقابل للنقطة A وكان لدينا z_b العدد العقدي المقابل للنقطة B فإن التمثيل الوسيطي لها يكون

$$(1-t)z_a + t z_b \qquad 0 \le t \le 1$$

/ /

لنثبت أ من أجل المنحنى الأول

• $\Gamma_1 : \gamma_1(t) = it \quad ; 0 \le t \le 1$



عدد تخيلي

$\gamma_1(t) = i\underbrace{t}_{\text{القسم الحقيقي}} \quad ; 0 \le t \le 1$

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\,dt$$

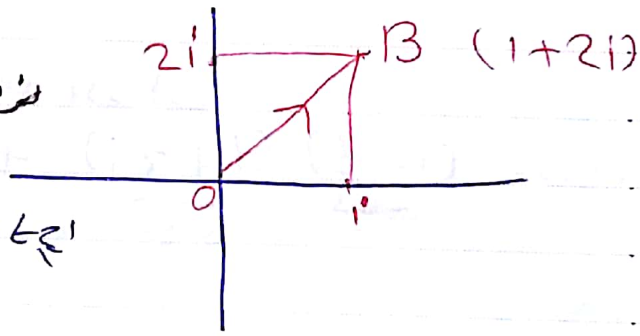
$$= \int_0^1 \underbrace{[(t-0)^2 + i\,3(0)^2]}_{f(\gamma_1(t))} \cdot i\,dt$$

$$= i\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}i$$

بخصوص المنحنى الثاني

• $\Gamma_2 \quad ; \gamma_2(t)$

نريد التحويل على OB منطقة التمثيل السهمي



$\gamma_2(t) = (1-t)\underbrace{(0)}_{\text{البداية}} + t\underbrace{(1+2i)}_{\text{النهاية}} \quad 0 \le t \le 1$

$\gamma_2(t) = \underbrace{t}_{x} + \underbrace{2t}_{y} i$

$$\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma_2(t)) \cdot (\gamma_2'(t))\,dt$$

$$= \int ((2t-t)^2 + i\,3t^2) \cdot (1+2i)\,dt$$

$$= (1+2i)\int_0^1 (t^2 + i\,3t^2)\,dt$$

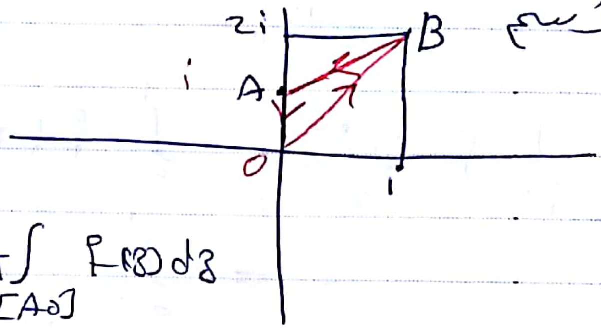
$$= (1+2i)(1+3i)\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1-6+5i}{3} = -\frac{5}{3}+\frac{5}{3}i$$

التكامل على المثلث $\overset{\Delta}{OAB}$

هو عبارة عن ثلاث قطع مستقيمة لذلك نتم تجزئته

$$\Gamma_3 = [OA] \oplus [AB] \oplus [BO]$$

نرسم



$$\int_{\overset{\Delta}{OAB}} f(z)\,dz = \int_{[OB]} f(z)\,dz + \int_{[BA]} f(z)\,dz + \int_{[AO]} f(z)\,dz$$

أوجدناه ~~سا~~بقاً

$$\underbrace{\int_{\Gamma_2} f}_{\text{محسوب}} - \underbrace{\int_{\Gamma_1} f}_{\text{محسوب}} + \int_{[BA]} f \;?$$

نقوم التكامل الثالث

$$\gamma_3(t) = \underbrace{(1-t)}_{\text{المعطى}}\underbrace{(1+2i)}_{\text{البداية } B} + t\underbrace{i}_{\text{النهاية}} \;;\quad 0 \leq t \leq 1$$

$$= (1-t) + ((t+2)(1-t))i$$

$$= \underbrace{(1-t)}_{x} + \underbrace{(2-t)}_{y}i$$

$$\int_{[BA]} f = \int_0^1 f(\gamma_3(t)) \cdot \gamma_3'(t)\,dt$$

/ /

$$\gamma_3(t) = \int_0^1 \left((2 \cancel{-t} -1 \cancel{+t})^2 + i\,3(1-t)^2 \right) \cdot (-1-i)\,dt$$

$$= (-1-i)\int_0^1 1 + i3(1-2t+t^2)\,dt$$

$$= (-1-i)\int_0^1 1 + i3 - 6it + i3t^2\,dt$$

$$= (-1-i)\left[[t]_0^1 + [i3t]_0^1 - \left[\frac{6it^2}{2}\right]_0^1 + [it^3]_0^1 \right]$$

$$= (-1-i)\left[(1-0) + (i3 - i3(0)) - (3i - 0) + i \right]$$

$$= (-1-i)\left[1 + \cancel{i3} - \cancel{i3} + i \right]$$

$$= (-1-i)(1+i) = \boxed{-2i}$$

الآن نعوض

$$\int_{\overset{\triangle}{OAB}} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f - \int_{\Gamma_1} f + \int_{[BA]} f$$

$$= -\frac{5}{3} + \frac{5}{3}i - \frac{1}{3}i - 2i$$

$$= -\frac{5}{3} + \frac{4}{3}i - 2i = -\frac{5}{3} - \frac{2}{3}i$$

نلاحظ أن قيمة التكامل غير معدومة

$\boxed{\text{حساب } \Gamma_4}$

* $\Gamma_4 = [OA] \oplus [AB]$

$$\int_{\Gamma_4} f = \int_{[OA]} f + \int_{[AB]} f = \int_{\Gamma_1} f - \int_{[BA]} f$$

$$= \frac{1}{3}i + \frac{5}{3} + \frac{2}{3}i = \frac{5}{3} + i$$

بالمقارنة

$$\int_{\Gamma_2} f = -\frac{5}{3} + \frac{5}{3}i \neq \int_{\Gamma_4} f = \frac{5}{3} + i$$

نستنتج أن التكامل غير مستقل عن الطريق المسلوك

لأن لدينا طريقين لهما نفس البداية ونفس النهاية ولكنهما غير متساويين

الخاصة 5

إذا كان f تابعاً محدوداً على الطريق Γ $(\exists M>0 : |f(z)| \le M \;;\; \forall z \in \Gamma)$

فإن

$$\left|\int_{\Gamma} f\right| \le M\, L(\Gamma)$$

انتهت المحاضرة ١

كمال الرفاعي — هالة مصطفى