تعريف 1 :

المسافة بين عنصر ومجموعة غير خالية من فضاء ~~[illegible]~~ متري :

ليكن $x \in X$ حيث (X,d) فضاء متري ، $\phi \neq M \subseteq X$

تعرف المسافة بين x و M :

$$D(M,x) = \inf_{y \in M} d(x,\bar{y}) \quad , y \in M$$

وتصبح هذه المسافة في فضاء منظم ؛ $\exists y \in M$

$$D(M,x) = \inf \|x-\bar{y}\|$$

تعريف 2 :

القطعة المستقيمة الواصلة بين عنصرين :

X (فضاء متجهي) $x,y \in$ ، تعرف القطعة المستقيمة الواصلة بين عنصرين x و y من فضاء متجهي X بأنها مجموعة كل العناصر $Z \in X$ من الشكل :

$$Z = \alpha x + (1-\alpha) y$$

$$(\alpha \in \mathbb{R} \ , \ 0 < \alpha \leq 1)$$

تعريف 3 :

المجموعة المحدبة :

نقول عن مجموعة جزئية M من X انها محدبة إذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين x و y في M محتواة في M .

مبرهنة المتجه المصغر :

ليكن X فضاء جداء داخلي ولتكن $\phi \neq M \subseteq X$ ومحدبة وتامة (بالنسبة للمترك المحدد بالجداء الداخلي) ، عندئذ يوجد لكل عنصر $x \in X$ وحيد $y \in M$ بحيث يكون :

$$\delta = \inf_{\bar{y} \in M} \|x-\bar{y}\| = \|x-y\|$$

البرهان:

لدينا X فضاء جداء داخلي، $\phi \neq M \subseteq X$ محدبة وتامة

لدينا حسب تعريف الـ inf فإنه يوجد متتالية $\delta_n = \|x - y_n\|$ تحقق $\delta_n \longrightarrow \delta$

والمتتالية موجودة بسبب وجود الـ inf

كما وأن $y_n \in M$

لنبين أن y_n كوشية في M

لنضع:

$v_n = y_n - x$، نلاحظ أن $\|v_n\| = \delta_n$

لدينا:

$$\|v_n + v_m\| = \|y_n - x + y_m - x\|$$
$$= \|y_n + y_m - 2x\| = 2\left\|\frac{(y_n + y_m)}{2} - x\right\|$$

لدينا $y_n, y_m \in M$ كما وأن M محدبة عندئذٍ:

$$\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in M$$

وبالتالي نلاحظ أن:

$$\|v_n + v_m\| = 2\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\right\| \geq 2\delta$$

حيث أن δ أصغر بعد لـ x عن M

كما وأن لدينا:

$$\|v_n - v_m\| = \|y_n - x - (y_m - x)\| = \|y_n - y_m\|$$

لنعوض في مساواة متوازي الاضلاع:

$$\|v_n + v_m\|^2 + \|v_n - v_m\|^2 \overset{?}{=} 2(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2)$$

Alnour

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \|y_n - y_m\|^2 \leq -(2\delta)^2 + 2(\delta_n^2 + \delta_m^2)$$

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq -4\delta^2 + 2\delta_n^2 + 2\delta_m^2$$

$$\leq -2\delta^2 + 2\delta_n^2 + 2\delta_m^2 - 2\delta^2$$

$$\leq 2(\delta - \delta_n)(\delta + \delta_n) + 2\underbrace{(\delta - \delta_m)(\delta + \delta_m)}_{(\delta^2 - \delta_m^2)}$$

ولما كانت δ_n متقاربة و δ ثابتة فإنه $\delta_n + \delta$ محدود

وكذلك $\delta_m + \delta$ محدود بسبب التقارب

ونجعل $n \to \infty$ ؛

$$0 \leq \|y_n - y_m\| \leq 2(\delta - \delta_n)(\delta + \delta_n) + 2(\delta - \delta_m)(\delta + \delta_m)$$

$$\longrightarrow 2(0)(\delta + \delta_n) + 2(0)(\delta + \delta_m)$$

$$= 0 + 0 = 0$$

مما يبين أن y_n كوشية في M ولكون M تامة فهي متقاربة في M ، وليكن $y_n \longrightarrow y \in M$ ولكون $y \in M$ فإنه ؛

$$\|x - y\| \geq \delta$$

أصغر بعد لـ x عن M

كما أن: $\|x - y\| \leq \|x - y_n + y_n - y\|$

$$\leq \|x - y_n\| + \|y_n - y\|$$

$$= \delta_n + \|y_n - y\| \longrightarrow \delta + 0 = \delta$$

أي أن ؛ $\delta \leq \|x - y\| \longrightarrow \delta$

وبالتالي فإن ؛ $\|x - y\| = \delta$

حيث أن النظيم يأخذ قيمه في $\mathbb{R}$

• لنثبت الوحدانية :

ليكن y_0, y في M يحققان المساويتين :

$$\| x - y \| = \delta , \| x - y_0 \| = \delta$$

ولنبين أن $y = y_0$

لدينا حسب مساواة متوازي الأضلاع :

$$\| y - y_0 \|^2 = \| (y - x) - (y_0 - x) \|^2 \Longrightarrow$$

$$\| (y - x) - (y_0 - x) \|^2 + \| (y - x) + (y_0 - x) \|^2$$

$$= 2 (\| y - x \|^2 + \| y_0 - x \|^2)$$

$$\Rightarrow \| y - y_0 \|^2 = 2 (\delta^2 + \delta^2) - \| 2 (\frac{y + y_0}{2}) - x \|^2$$

$$= 4 \delta^2 - 2^2 \| \frac{y + y_0}{2} - x \|^2$$

وبما أن $\frac{y + y_0}{2} \in M$ لكون M محدبة .

إذن : $\| \frac{y + y_0}{2} - x \| \geqslant \delta$

فإنه يكون :

$$- 2^2 \| \frac{y + y_0}{2} - x \|^2 \leqslant - 4 \delta^2$$

لنعوض :

$$\| y - y_0 \| = 4 \delta^2 - 4 \| \frac{y + y_0}{2} - x \|^2$$

$$\| y - y_0 \| \leqslant 4 \delta^2 - 4 \delta^2 = 0$$

وكما أن :

$$0 \leqslant \| y - y_0 \|$$

مما يبين أن : $\| y - y_0 \| = 0 \Longrightarrow y - y_0 = 0 \Longrightarrow \boxed{y = y_0}$

تم إثبات الوحدانية وهو المطلوب ...

تمهيدية (التعامد):
ليكن M فضاء جزئي تام في M وأن $x \in X$ نقطة مثبتة في X عندئذٍ يكون $z = x - y$ عمودياً على Y.

البرهان:

إذا لم يصح كون $Y \perp Z$، لوجدت نقطة $y_1 \in Y$، بحيث أن:
$$\langle z, y_1 \rangle = \beta \neq 0$$

من الواضح أن $y_1 \neq 0$ لأن إذا لم يتحقق هذا الأمر لكان
$$\langle z, y_0 \rangle = 0$$

وفضلاً عن ذلك، نرى أنه إذا كان α عدداً ما فإن:
$$\| z - \alpha y_1 \|^2 = \langle z - \alpha y_1 , z - \alpha y_1 \rangle$$
$$= \langle z, z \rangle - \bar{\alpha} \langle z, y_1 \rangle - \alpha \left[\langle y_1, z \rangle - \bar{\alpha} \langle y_1, y_1 \rangle \right]$$
$$= \langle z, z \rangle - \bar{\alpha} \beta - \alpha \underbrace{\left[\bar{\beta} - \bar{\alpha} \langle y_1, y_1 \rangle \right]}_{\star}$$

إن المقدار $\star$ يغدو صفراً إذا افترضنا أن:
$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{\beta}}{\langle y_1, y_1 \rangle}$$

يترتب على تعريف δ أن:
$$\| z \| = \| x - y \| = \delta$$

$\Leftarrow$ هذا يقتضي:
$$\| z - \alpha y_1 \|^2 = \| z \|^2 - \frac{| \beta |^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} < \delta^2$$

ولما كان هذا أمراً غير ممكن لأننا نجد عندئذٍ أن:
$$y_2 = y + \alpha y_1 \in Y ; \text{ حيث } z - \alpha y_1 = x - y_2$$

فإن: $\| z - \alpha y_1 \| \geqslant \delta$ وفق تعريف $\delta \Leftarrow$ لا يمكن أن يتحقق $\heartsuit$ والتمهيدية صحيحة.

END.

2017 / 4 / 23 تابع 2 ح (11) + (12) والأخيرة

تعريف: (المجموع المباشر):

يقال عن فضاء متجهي X أنه مجموع مباشر لفضاءين جزئيين Y و Z من X ونكتب:

$$X = Y \oplus Z.$$

إذا كان لكل عنصر $x \in X$ تمثيل وحيد بالشكل:

$$x = y + z \qquad y \in Y \ , \ z \in Z$$

وعندئذٍ يسمى Z المتمم الجبري لـ Y في X وبالعكس، كما يقال عن Y و Z انهما زوج متتام من الفضاءات الجزئية من X.

مثال: $Y = \mathbb{R}$ فضاء جزئي من المستوي الاقليدي $\mathbb{R}^2$، ومن الواضح انه يوجد لـ Y عدد غير منته من المتممات الجبرية في $\mathbb{R}^2$، كل منها محور حقيقي، أكثرها ملائمة هو المتمم العمودي على Y.

مبرهنة: المجموع ~~المتعامد~~ المباشر:

ليكن Y فضاء جزئي مغلقاً في فضاء H (هلبرت) عندئذٍ يكون:

$$H = Y \oplus Z \ ; \ Z = Y^{\perp} \ (Y \text{ ليعامد})$$

البرهان:

لدينا Y مغلق في فضاء H وتاماً لكون فضاء هلبرت

$\Longrightarrow$ يكون Y تاماً

وحسب مبرهنة سابقة حيث Y محدبة (لكونه مغلق) فإنه يوجد لكل $x \in H$ عنصر y بحيث يكون: $z = x - y$

$$\Longrightarrow x = y + z$$

لإثبات الوحدانية. نفرض أن:

$$x = y + z = y_1 + z_1$$

حيث ~~$y_1 y_1 \in Y$~~ $z, z_1 \in Z$ ، $y, y_1 \in Y$

عندئذٍ فإن:

$$y - y_1 = z_1 - z$$

وبما أن: $y - y_1 \in Y$, $z_1 - z \in Z$

فإنه يكون:

$$y - y_1 = z_1 - z \in Y \cap Z = Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$$

مما يبين أن $y = y_1$ و $z = z_1$ $\Leftarrow$ فإن x يكتب:

بشكل وحيد لمجموع عنصر من Y وعنصر من Z . (و.هـ.م).

حيث: تقاطع فضاء مع مسامدة هو $\{0\}$

أي $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$

تعريف:

ليكن التطبيق: $P : H \longrightarrow Y$

$$x \longmapsto y = Px$$

يسمى التطبيق P المسقط أو مؤثر الإسقاط لـ H على Y.

من الواضح أن P هو مؤثر خطي محدود، كما انه تطبيق لـ H على Y ، و لـ Y على Y نفسه

و $Y^{\perp} = Z$ على $\{0\}$

وهو تطبيق (مراوح) أي أن $\underbrace{P^2 = P}$

(يعني لو طبقنا الاسقاط مرة واحدة أو أكثر نفس ~~الحصر~~ الشي).

تمهيدية (الفضاء الصفري):

إن المتمم المعامد $Y^{\perp}$ لفضاء جزئي مغلق Y في فضاء هلبرت H هو الفضاء الصفري $N(P)$ للمسقط المعامد P لـ H على Y،

- إن المتمم المعامد هو عادم خاص،

ونعني بالعادم $M^{\perp}$ لمجموعة $M \neq \phi$ في فضاء جداء داخلي X المجموعة:

$$M^{\perp} = \{x \in X \mid x \perp M\}$$

- بالتالي:

$x \in M^{\perp} \iff$ هو أن يكون $\langle x, v\rangle = 0$ أياً كان v في M

(وهذا يفسر سبب اسم العادم).

- لاحظ أن:

$M^{\perp}$ فضاء متجهي، ذلك لأن إذا كان $x, y \in M^{\perp}$

فإننا نستنتج: $\forall v \in M$ ، α, β :

$$\langle \alpha x + \beta y, v\rangle = \alpha\langle x, v\rangle + \beta\langle y, v\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in M^{\perp}$$

- إن المجموعة $M^{\perp}$ مغلقة، سنرمز لـ $(M^{\perp})^{\perp}$ بـ $M^{\perp\perp}$ وهكذا ...

ونجد بوجه عام أن $M \subset M^{\perp\perp}$

لأن:

$$x \in M \Rightarrow x \perp M^{\perp} \Rightarrow x \in (M^{\perp})^{\perp} =$$

Alnour

أما في حالة الفضاءات الجزئية المغلقة، فإننا نجد:

تمهيدية (الفضاء الجزئي المغلق)
إذا كان Y فضاءً جزئياً مغلقاً في فضاء هلبرت H، فإن

$$Y = Y^{\perp\perp}$$

البرهان:
لدينا $Y \subseteq Y^{\perp\perp}$، لنبين العكس

ليكن $x \in Y^{\perp\perp}$ عنصراً، فإن $x \in H$، وحسب مبرهنة ~~الجمع~~ الجمع المباشر حيث Y مغلق فإن:

$$\cancel{x \in Y} \quad x \in H = Y \oplus Y^{\perp}$$

بالتالي نجد أن $\boxed{\cancel{x}}$ $x = y + z$

حيث $y \in Y \subseteq Y^{\perp\perp}$, $z \in Y^{\perp}$

كما وأن: $x = y + z \Rightarrow x - y = z$

ولما كان $Y^{\perp\perp}$ فضاء متجهي فإن: $z = x - y \in Y^{\perp\perp}$

أصبح لدينا: $z \in Y^{\perp} \cap Y^{\perp\perp} = \{0\}$

مما يبين أن $z = 0$

وبالتالي: $x = y + z = y + 0 = y$

حيث أن $y \in Y$، مما يبين أن $x \in Y$ وأن $Y^{\perp\perp} \subseteq Y$

Alnour

بالتالي يكون $Y = Y^{\perp\perp}$ و.هـ.م.

تمهيدية المجموعة الكثيفة:

إذا كانت (هلبرت) $H \supseteq M \neq \phi$ فإن الشرط اللازم والكافي كي تكون $span\,M$ مجموعة كثيفة في H هو أن يكون:

$$M^{\perp} = \{0\}$$

البرهان:

$\Leftarrow$ لنفرض أن $V = span\,M$ كثيفة في H ولنأخذ $x \in M^{\perp}$ عندئذٍ يكون $x \in H = \overline{V}$

$\Leftarrow$ حسب تعريف $\overline{V}$ فإنه توجد $x_n \in V$ بحيث أن $x_n \to x$ وبما أن

$x \in M^{\perp}$ ، $M^{\perp} \perp V$ فإننا نجد : $\langle x_n, x\rangle = 0$

وحسب تمهيدية استمرار الجداء حيث $x_n \to x$ فإن :

$\langle x_n, x\rangle \longrightarrow \langle x, x\rangle$

كما وأن $0 = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$ حيث $\langle x_n, x\rangle = 0$

مما يبين أن $x = 0$ ولما كان x اختيارياً من $M^{\perp}$ فإننا نجد أن $M^{\perp} = \{0\}$

$\Rightarrow$ لنفرض أن $M^{\perp} = \{0\}$ ولتكن $V = span\,M$ ولنثبت أن $\overline{V} = M$

لدينا $\overline{V}$ مغلقة في H $\Leftarrow$ حسب مبرهنة سابقة لكون H هلبرت فإن:

Alnour

$$H = \bar{V} \oplus \bar{V}^{\perp}$$

لكن: $x^* \in \bar{V}^{\perp}$ عندئذ: $x^* \perp \bar{V}$

ولما كانت $V \subseteq \bar{V}$ فإن $x^* \perp V$

أي أن: $x^* \in V^{\perp}$

⟸ فإن $x^* \perp M$ أي أن: $x^* \in M^{\perp}$

وحسب الفرض لدينا: $M^{\perp} = \{0\}$

مما يبين أن $x^* = 0$ فإن $\bar{V}^{\perp} = \{0\}$

حيث أن x^* اختيارياً من $\bar{V}$

بالتالي نجد أن $H = \bar{V}$ وأن V كثيفة في H

حيث $V = \operatorname{span} M$ حيث $\bar{V}^{\perp} = \{0\}$

و.هـ.م

تدريب: $y \perp x_n$

بين أن الشرطين $\cancel{M \perp x_n}$ و $x_n \to x$ معاً يقتضيان

أن $x \perp y$

الحل:

$y \perp x_n \Rightarrow \langle y, x_n \rangle = 0$ أياً كانت $n \in \mathbb{N}$

$$\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longleftarrow x_n \longrightarrow x$$

$$\langle x_n , y \rangle \longrightarrow \langle x , y \rangle$$

وذلك بسبب استمرار الجداء الداخلي

لكن $\langle x , y \rangle = 0 \Longleftarrow \langle x_n , y \rangle = 0$

ذلك لأن $|\langle x_n , y \rangle - \langle x , y \rangle| =$

$$|\langle x_n - x , y \rangle|$$

بأخذ النهايات يصح المطلوب .

انتهى المقرر ...

إعداد :
الشارد ريمي
R7

Alnour