المحاضرة الثالثة عشر.   30 / 4 / 2019

الكتاب الأحمر :

- تمرين (مهم للامتحان)
- تمثيل علاقات بواسطة مصفوفات.
- تمثيل العلاقات باستخدام البيانات.

تمرين :

أوجد الأزواج المرتبة في علاقة التكافؤ $R$ المولدة من خلال التجزئة

$A_1 = \{1, 2, 3\}$ ، $A_2 = \{4, 5\}$ ، $A_3 = \{6\}$

للمجموعة $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

الحل :

إن العلاقة $R$ هي علاقة تكافؤ على $A$ بحيث :

$G_R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1),$
$(3,2), (3,3), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5), (6,6)\}$

نلاحظ أن :

صفوف تكافؤ $[1] = [2] = [3] = A_1 = \{1, 2, 3\}$

$[4] = [5] = A_2 = \{4, 5\}$

$[6] = A_3 = \{6\}$

تمرين : بين فيما إذا كانت العلاقة $R$ على مجموعة كل صفحات الويب، انعكاسية، تناظرية، متعدية أو متعدية، إذا علمت أن

$(a,b) \in G_R$ إذا وفقط إذا :

1- كان أي مستخدم قد زار صفحة الويب $a$ فإنه زار أيضاً صفحة الويب $b$.

2- إذا كانت لا توجد أية روابط مشتركة بين صفحة الويب $a$ وصفحة الويب $b$.

تمثيل العلاقات بواسطة المصفوفات :

إذا كان منطلق العلاقة ومستقرها مجموعات منتهية فإننا يمكننا تمثيل العلاقات على شكل مصفوفة عناصرها مأخوذة من العددين 0 أو 1.

فإذا كانت $R$ علاقة منطلقها $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ومستقرها $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ حيث وضع ترتيب معين لعناصر $A, B$ ولكن ترتيب كيفي عندئذ يمكن تمثيل العلاقة $R$ بمصفوفة :

/ /

$$M_R = (m_{ij}) \ ; \ m_{i,j} = \begin{cases} 1 & (a_i, b_j) \in G_R \\ 0 & (a_i, b_j) \notin G_R \end{cases}$$

ملاحظة :

- عدد عناصر المنطلق هو عدد أسطر المصفوفة .
- عدد عناصر المستقر هو عدد أعمدة المصفوفة .

مثال :

$B = \{1,2\}$ , $A = \{1, 2, 3\}$

ولتكن R علاقة من A إلى B حيث :

أي $a, b$ مرتبطين : $(a,b) \in G_R \iff a > b$

ما بيان العلاقة R وكيف سيكون تمثيل المصفوفي ؟

$G_R = \{(2,1), (3,2), (3,1)\}$

فالعلاقة R تمثيلها من خلال المصفوفة :

$$M_{n \times m} = M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال : أوجد بيان العلاقة R في $A = \{a, b, c\}$ ، وتمثيل المصفوفي إذا كان $a, b, c$ كل منهم يرتبط مع نفسه فقط .

الحل :

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن بيانها :

$G_R = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$

/ /

**مثال:** اذا كانت
$A = \{a_1, a_2, a_3\}$
$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$

وكانت

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فأوجد $G_R$.

**الحل:**

ان نعطي $G_R$ كمايلي:

$$G_R = \{(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_2,b_3),(a_2,b_4),(a_3,b_1),(a_3,b_3),(a_3,b_5)\}$$

**صفات العلاقة بالتمثيل المصفوفي:**

اذا كانت العلاقة $R$ من المجموعة $A$ نفسها فإن $M_R$ تكون مربعة.

1- تكون $R$ انعكاسية اذا كانت عناصر القطر الرئيسي جميعها $I$ أي $m_{ii} = 1$

2- تكون $R$ تناظرية اذا $M_R = (M_R)^T$.

3- تكون $R$ تخالفية اذا اذا كان $m_{ij} = 1$ حيث $i \neq j$ فإن $m_{ji} = 0$ غير ذلك يكون $m_{ij} = m_{ji} = 0$ عندما $i \neq j$

4- $m_{ji} = 0$

$$\left\{ \begin{array}{ll} m_{ij} = 1 & : i \neq j \\ m_{ij} = m_{ji} = 0 & , i \neq j \end{array} \right.$$ تكون $R$ تخالفية.

**مثال:**

لتكن العلاقة $R$ والتي تمثل بالمصفوفة:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (M_R)^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ان $R$ انعكاسية متناظرة ولكن ليست تخالفية لأن $m_{12} = 1$ وبنفس الوقت $m_{21} = 1$ يمكن أيضاً تمثيل العمليات على العلاقات من خلال المصفوفات

أ- $R_1 \cup R_2 \leftarrow M_{R_1} \vee M_{R_2}$

و $R_1 \cap R_2 \leftarrow M_{R_1} \wedge M_{R_2}$

مثال:

بفرض أن $R_1 , R_2$ علاقتان ممثلتان على الترتيب بالمصفوفتين:

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لنوجد مصفوفة $R_1 \cup R_2$:

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ومصفوفة $R_1 \cap R_2$:

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مهم

الإشارة $\wedge$ تدل على: (تقاطع أو ضرب).

والإشارة $\vee$ تدل على: (اجتماع أو جمع).

مثل: $1 \wedge 1 \to 1$ , $1 \vee 1 \to 1$

$1 \wedge 0 \to 0$ , $1 \vee 0 \to 1$

$0 \wedge 1 \to 0$ , $0 \vee 1 \to 1$

$0 \wedge 0 \to 0$ , $0 \vee 0 \to 0$

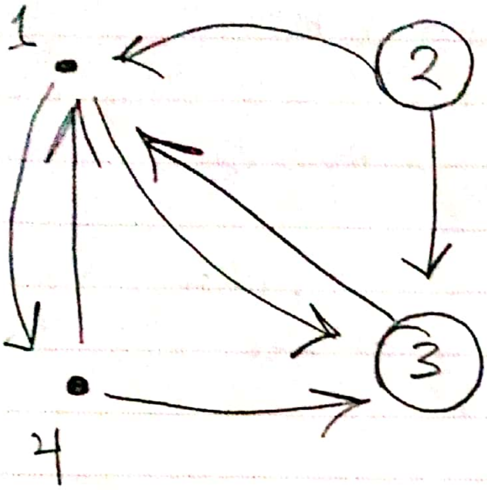
تمثيل العلاقات باستخدام البيانات الموجهة.

لتكن $R$ علاقة على المجموعة $A = \{1,2,3,4\}$ وبيانها $G$ هو

$$G_A = \{(1,4),(2,2),(2,1),(2,3),(3,3),(1,3),(3,1),(4,3),(4,1)\}$$

عندئذ يمكن تمثيل العلاقة السابقة على شكل بيان فيه 4 عقد بعدد عناصر المجموعة $A$ و 9 أضلاع موجهة (بعدد عناصر البيان $G$) على الشكل (الدائرة تعني أنه مرتبط مع نفسه = loop)

1- تكون R انعكاسية إذا وجدت Loop عند كل عقدة من عقد البيان.




2- تكون R تناظرية إذا كان لكل ضلع موجه بين عقدتين ضلع معاكس له بالاتجاه بين هاتين العقدتين.

3- تكون R تخالفية عندما لا يوجد ضلعان موجهان متعاكسان بالاتجاه بين أي عقدتين.

4- تكون R متعدية في حال وجود ضلع من a إلى b وضلع من b إلى c فيجب أن يوجد ضلع موجه من a إلى c يغلقه المثلث abc.

مما سبق نجد أن العلاقة R في المثال السابق ليست انعكاسية ولا تناظرية ولا تخالفية ولا متعدية.

أثبت ما يلي:

يكون $n$ عدد فردياً إن وفقط إذا كانت $8|(n^2-1)$

الإثبات:

لنفرض أن $n$ عدد فردي فإنه يكتب بالشكل:

$$n = 2K+1 \quad ; \quad K \text{ عدد صحيح}$$

لنحسب المقدار:

$$n^2-1 = (2K+1)^2-1 = 4K^2+4K+1-1 = 4K(K+1)$$

$K(K+1)$ زوجي لأن $K$ و $K+1$ عددان صحيحان متتاليان أحدهما زوجي والآخر فردي فإن جداءهما بعضهما أيضاً زوجي وهو يكتب بالشكل $K(K+1) = 2m$ حيث $m$ عدد صحيح ما.

$$n^2-1 = 4K(K+1) = 4\times 2m = 8m$$

حيث $m$ عدد صحيح ما

ومنه $n^2-1$ من مضاعفات الـ 8 عندئذ $8|(n^2-1)$

/ /

الاقتضاء المعاكس.

لنفرض ان $8 \mid (x^2-1)$ عندئذ: $x^2-1 = 8K$ حيث $K$ عدد صحيح ما:

$$x^2 = 8K+1 = 2(4K)+1$$

$x^2$ فردي وبالتالي $x$ فردي وذلك حسب مبرهنة سابقة.

تمرين:

برهن نظرية ثنائي الحد حسب الاستقراء الرياضي:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r$$

إن هذه النظرية صحيحة من أجل $n=1$

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{1} \binom{1}{r} a^{1-r} \cdot b^r = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 \cdot b^1 \qquad \binom{1}{1} = \binom{1}{0}$$

$$= a+b = (a+b)^1$$

نفرض ان النظرية صحيحة أجل $n$ أي:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r$$

نثبت صحة النظرية من أجل $n+1$

أي:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} a^{n+1-r} \cdot b^r$$

الاثبات:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$

$$= (a+b) \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r$$

$$= (a+b)\left(a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dots + \binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^n + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n\right)$$

إن الحد الذي يحوي $b^r$ في المفكوك نحصل عليه:

$$b\left[\binom{n}{r-1} a^{n-r+1} \cdot b^{r-1}\right] + a\left[\binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r\right)$$

$$= \binom{n}{r-1} a^{n-r+1} \cdot b^n + \binom{n}{r} a^{n-r+1} \cdot b^n$$

$$= a^{n-r+1} \cdot b^r \left[\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}\right] = \binom{n+1}{r} a^{n-r+1} \cdot b^n$$

وبالتالي الحد الذي يحوي $b^r$ هو $\binom{n+1}{r} \cdot a^{n-r+1} \cdot b^r$

وبما أن $(a+b)^{n+1}$ كثير حدود من الدرجة $n+1$ فيكون

$$(a+b)^{n+1} = (a+b).(a+b)^n = \sum_{r=0}^{r} \binom{n+1}{r} a^{n-r+1} \cdot b^r$$

ملاحظة

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$$

ومثلث باسكال.

انتهت المحاضرة .. ^_^