المحاضرة الخامسة عشر ..
الأخيرة

13 / 5 / 2019.

مثال: عبر عن التابع:

$$f(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

بأنه تابع معرف تعودياً.

الحل:

$f(1) = 1 = 1^2$

$f(2) = 5 = 1^2 + 2^2 = f(1) + 2^2$

$f(3) = 14 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = f(2) + 3^2$

$f(4) = 30 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = f(3) + 4^2$

$f(5) = 55 = f(4) = 5^2$

نظهر للتابع $f(n)$ الشكل:

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(k) = f(k-1) + k^2 \end{cases}$$

لإثبات أن $f(n)$ له الشكل العودي [عن طريقة الاستقراء]

1- $f(1) = 1$ محققة.

2- نفرض أن العلاقة محققة من أجل $K=1$

$$f(k-1) = \frac{(k-1)(k)(2k-1)}{6}$$

لنبرهن صحة العلاقة من أجل K:

$$f(k-1) + k^2 = \frac{(k-1)(k)(2k-1)}{6} + k^2$$

$$= \frac{(k-1)(k)(2k-1) + 6k^2}{6}$$

$$= \frac{k[(k-1)(2k-1) + 6k]}{6} = \frac{k[2k^2 - k - 2k + 1 + 6k]}{6}$$

$$= \frac{k(2k^2 + 3k + 1)}{6} = \frac{k(2k+1)(k+1)}{6}$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = f(k)$$

/ /

« الأشكال المغلقة للمجاميع »

ليكن لدينا المجموع المنتهي :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \cdots$$

مثلاً : نعلم ان

1- $$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

شكل مغلق

التعبير $\frac{n(n+1)}{2}$ هو شكل مغلق .

2- $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

أيضاً شكل مغلق .

3- $$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

شكل مغلق .

4- $$(a \neq 1) \qquad \sum_{i=1}^{n} i\,a^i = \frac{a - (n+1)a^{n+1} + n a^{n+2}}{(a-1)^2}$$

الاشكال المغلقة مفيدة للغاية خاصة أثناء حساب العمليات التي تشكل عند إجراء خوارزمية ما .

لنثبت الأشكال السابقة :

① -

$$S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$$

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ مرة}}$$

$$2S = n(n+1) \Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$$

③ -

$$S = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$$

$$aS = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n+1}$$

بالطرح :

$$S - aS = 1 - a^{n+1}$$

$$aS - S = a^{n+1} - 1$$

$$\Rightarrow (a-1)S = a^{n+1} - 1 \quad \Rightarrow S = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

(4). لتكن $S_n = \sum_{i=1}^{n} i a^i$

عندئذ $S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} i a^i + (n+1) a^{n+1}$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) a^{n+1} \quad \ldots *$$

من جهة أخرى: $S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} i a^i$

حيث $\sum_{i=m}^{n} a_{i+k} = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_i$

$$= \sum_{i=0}^{n} (i+1) a^{i+1}$$

نفك الجمع:

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} i a^{i+1} + \sum_{i=0}^{n} a^{i+1} \quad \ldots **$$

$$= a \sum_{i=1}^{n} i a^i + a \sum_{i=1}^{n} a^i$$

$$S_{n+1} = a S_n + a\left(\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\right)$$

نساوي بين الصيغتين * و **

$$S_{n+1} = S_{n+1}$$

$$S_n + (n+1) a^{n+1} = a S_n + a\left(\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\right)$$

$$(n+1) a^{n+1} - a\left(\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\right) = a S_n - S_n$$

$$\frac{(n+1) a^{n+1} (a-1) - a^{n+2} + a}{a-1} = (a-1) S_n$$

$$\frac{(n+1)\left(a^{n+2} - a^{n+1}\right) - a^{n+2} + a}{(a-1)^2} = S_n$$

$$S_n = \frac{a - (n+1) a^{n+1} + n a^{n+2}}{(a-1)^2}$$

/ /

تمرين، أوجد الشكل المغلق للمجموع:

$$\sum_{i=0}^{n} i\,(i-1)$$

$$\sum_{i=0}^{n} (i^2 - i) = \sum_{i=0}^{n} i^2 - \sum_{i=0}^{n} i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1-3)$$

$$= \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n-2) = \frac{1}{3}\, n(n+1)(n-1)$$

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1) = \frac{1}{3}\, n(n+1)(n-1) = \frac{1}{3}\, n(n^2-1)$$

وهو الشكل المغلق للمجموع.

تمرين: أوجد الشكل المغلق للمجموع:

$$1+3+5+\dots+(2n+1) = \sum_{i=0}^{n} (2i+1)$$

الحل: نطبق خاصية تفريق المجموع:

$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = \sum_{i=0}^{n} 2i + \sum_{i=0}^{n} 1 = 2\sum_{i=0}^{n} i + (n+1)$$

$$= 2\,\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = n^2 + n + n + 1 = (n+1)^2$$

تمرين:

أوجد الشكل المغلق للمجموع:

$$\sum_{i=2}^{n} \left[2^i + 2i(3i+4) + 2\right]$$

الحل:

$$= \sum_{i=2}^{n} 2^i + 2\sum_{i=2} i(3i+4) + \sum_{i=2}^{n} 2$$

$$= \sum_{i=2}^{n} 2^i + 2\sum_{i=2}^{n} 3i^2 + 2\sum_{i=2}^{n} 4i + \sum_{i=2}^{n} 2$$

$$= \left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1} - (2+1)\right) + 6\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1\right] + 8\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right)$$

$$+ 2(n-2+1)$$

$$= 2^{n+1} - 4 + (n^2+n)(2n+1) - 6 + 4n^2 + 4n - 8 + 2(n-1)$$

$$= 2^{n+1} + 2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 4n^2 + 4n + 2n - 20$$

$$= 2^{n+1} + 2n^3 + 7n^2 + 7n - 20$$

$$= 2^{n+1} + n(2n^2 + 7n + 7) - 20$$

تمرين: بيّن أن المجموع $\sum_{i=1}^{n} i^2$ فيحسب بدلالة حدود من النمط $\sum_{i=1}^{n} i^2$ ، $\sum_{i=1}^{n} i$

الحل:
لننطلق من $\sum_{i=1}^{n} i^4$ ونضيف الحد $(n+1)^4$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 + (n+1)^4 = \sum_{i=1}^{n+1} i^4$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (i+1)^4 = \sum_{i=0}^{n} (i^4 + 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} i^4 + 4\sum_{i=0}^{n} i^3 + 6\sum_{i=0}^{n} i^2 + 4\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} 1$$

$$(n+1)^4 = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i + n + 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{6}{4}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i - (n+1$$

$\sum_{i=1}^{n} i^3$ يحسب بدلالة الحدود $\sum_{i=1}^{n} i^2$ ، $\sum_{i=1}^{n} i$.

ملاحظة: يمكن التعميم من أجل K أي $\sum_{i=1}^{n} i^k$ يمكن أن نحسب بدلالة الحدود من الشكل

$$\sum_{i=1}^{n} i, \sum_{i=1}^{n} i^2, \ldots, \sum_{i=1}^{n} i^{k-1}$$

التوابع المولدة:

نقول عن تابع G إنه تابع مولد لمتتالية غير منتهية من الأعداد

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

إذا كان

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

أي هو سلسلة القوى أو التعبير غير المنتهي.

مثال 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

هو التابع المولد للمتتالية:

$a_0 = 1, a_1 = 1, \ldots \quad a_n = 1$

مثال 2:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

نلاحظ أن $G(x) = e^x$ هو التابع المولد للمتتالية.

$$\frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \ldots, \frac{1}{n!}$$

مثال 3:

$$G(x) = x^2 + x^3 + x^4$$

هو التابع المولد للمتتالية

$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, \ldots \quad a_n = \ldots$

مطابقة عن المجاميع

1. $\sum_{i=m}^{n} c = (n-m+1)c$
2. $\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$
3. $\sum_{i=m}^{n} c a_i = c \sum_{i=m}^{n} a_i$
4. $\sum_{i=m}^{n} a_{i+k} = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_i$
5.

$$\sum_{i=m}^{n} a_i x^{i+k} = x^k \sum_{i=m}^{n} a_i x^i$$

/ /

نمط أسئلة الامتحان:

- سؤال خيارات عن التعاريف.
- أسئلة برهان من الدرس الأخير.
- مسألة تحليل قواعد.
- دائماً من العلاقات إثباتات..

انتهت المحاضرة ^^..