المحاضرة 15 — 10/5/2019

عنوان المحاضرة: التكامل العقدي وبرهنة كوشي وتايلور
وحل بعض التمارين

5) إذا كان f محدودًا على طريق Γ أي أنه يوجد $M>0$ حيث $|f(z)| \leq M$ فإن:

$$\left|\int_\Gamma f\right| \leq M L(\Gamma)$$

حيث M يمثل راجح لطويلة $f(z)$

تقول عن عدد إنه راجح لمقدار إذا كان أكبر منه

أي:
إذا كان التابع محدود على طريق ما فإن طويلة تكامله على ذلك الطريق أصغر أو تساوي العدد الراجح له مضروب بطول الطريق.

مثال: جد راجحًا لطويلة التكامل

$$\int_{C^+(0,2)} \frac{e^z}{z^2+1}\,dz$$

الحل:
الغاية:

$$|f(z)| = \left|\frac{e^z}{z^2+1}\right| = \frac{|e^z|}{|z^2+1|} = \frac{e^x}{|z^2+1|}$$

طول الطويلة أصغر أو تساوي عدد

لأن:

$$e^x \leq e^2 \qquad \forall z \in C^+(0,2)$$

لأن $C^+(0,2)$ دائرة مركزها الصفر ونصف قطرها 2 فإن الـ x الأكبر لنقطة واقعة على الدائرة هي 2 فإن $x \leq 2$ وحسب التابع حيث $e^x \leq e^2$

ولأن

$$|z^2+1| \geq \left||z|^2-1\right|$$

$$|a \mp b| \geq \left||a|-|b|\right|$$

$$|z^2+1| \geq \left||z|^2-1\right|$$

$z \in C^+(0,2)$ ، $|z| = 2$ حيث

ولأن z تمثل بعد z عن المركز أي $|z| = 2$ نصف القطر

$$\Rightarrow |z^2+1| \geq 4-1 = 3 \qquad \forall z \in C^+(0,2)$$

وبالمبرهنة

$$\forall z \in C^+(0,2);\ |f(z)| \leq \frac{e^2}{3} = M$$

$$\text{حسب الخاصة} \Rightarrow \left|\int \frac{e^z}{z^2+1}\,dz\right| \leq M\, L(C^+(0,2))$$

طول الدائرة "محيط الدائرة"

$$\leq \frac{e^2}{3}(4\pi)$$

$= 2\pi r = 4\pi$ ، $r=2$

انتهت الحضارة لك

/ /

مبرهنة:

إذا كان f مستمراً على منطقة G وكان لـ f تابع أصلي F على G

$\forall z \in G \quad (F'(z) = f(z))$

و Γ طريق في G فإن

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = F(z_T) - F(z_I)$$

حيث z_I بداية الطريق

z_T نهاية الطريق

ملاحظة:

إذا تحققت شروط المبرهنة السابقة وكان Γ طريقاً مغلقاً فإن $\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$

الفرق
أي البداية تساوي النهاية الطريق

أي بداية الطريق
تساوي نهاية الطريق

② نتيجة:

إذا كان f مستمراً على منطقة G ولـ f تابع أصلي F على G فإن التكامل لـ f مستقل عن الطريق المسلوك في G أي أن التكامل

$\int_{\Gamma} f(z)\,dz$ مستقل عن الطريق Γ ويعتمد فقط على البداية والنهاية

ملاحظة:

إذا تحققت شروط المبرهنة السابقة وكان z_1 و z_2 نقطتان في G فيصبح للتكامل $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$ معنى في G

إذا كانت $G = \mathbb{C}$ فإن للتكامل $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$ معنى

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$$

تمرين

هل للرمز $\int_{i}^{1+2i} \cos z\,dz$ معنى وإذا كان له معنى فاحسبه

الحل

إن $\cos z$ تابع مستمر على المنطقة $\mathbb{C}$ وله تابع أصلي على $\mathbb{C}$ وهو

$F(z) = \sin z \Rightarrow F'(z) = \cos z$ حيث $\sin z$

إذاً للرمز $\int_{i}^{1+2i} \cos z\,dz$ معنى

$$\int_{i}^{1+2i} \cos z\, dz = [\sin z]_{i}^{1+2i} = \sin(1+2i) - \sin i$$

* تنويه: إذا طلب أيضاً إيجاد الشكل الديكارتي للتكامل أي إيجاد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي فيكفي أن نكتب الدستور ونعوض فيه القيمة البدائية والنهائية

ملاحظة:
إن الاستمرار تابع عقدي على منطقة غير كافي لوجود تابع أصلي له على تلك المنطقة

مثال: لنبين أن الاستمرار لتابع عقدي غير كاف لوجود تابع أصلي

* إن $f(z) = \frac{1}{z}$ مستمر على المنطقة $\mathbb{C}^*$
وليس لهذا التابع تابع أصلي على $\mathbb{C}^*$

فلو فرضنا أن لـ f تابع أصلي على $\mathbb{C}^*$ فإنا $\int_{C^+(0,1)} \frac{1}{z}\, dz = 0$
حسب مبرهنتنا لأن $\frac{1}{z}$ مستمر على $\mathbb{C}^*$ وحسب الفرض الجدلي له تابع أصلي حسب الفرض الجدلي
وأن . منغلق $C^+(0,1) \subseteq \mathbb{C}^*$ طريقه

دائرة الواحدة $C^+(0,1)$ مغلقة وهي بسيط حرة وأخذه بالاتجاه الموجب

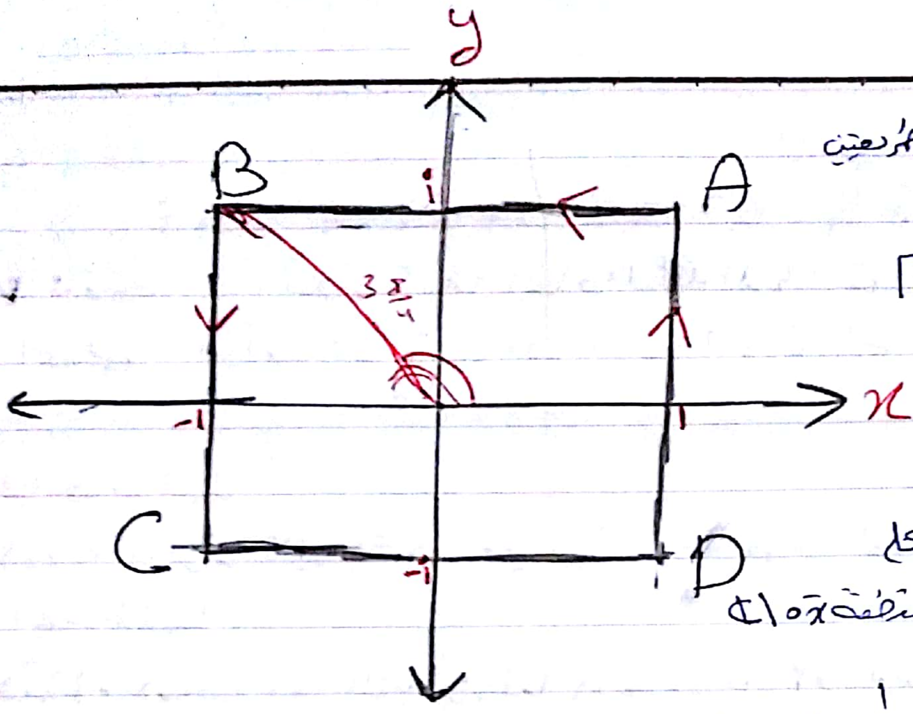
لكننا أثبتنا سابقاً أن $\int_{C^+(0,1)} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i \neq 0$
إذاً الفرض الجدلي خاطئ وليس للتابع
$\int_{C^+(0,1)} \frac{1}{z} dz$ تابع أصلي

تمرين:
احسب التكامل $\int_{\Gamma} \frac{1}{z}\, dz$ حيث Γ هو المربع الذي رؤوسه
$A(1+i)$, $B(-1+i)$, $C(-1-i)$, $D(1-i)$

الحل:

$\Leftarrow$

/ /



الحل :: الحد سنقسم المربع لمسارين المربعتين

لنأخذ

$$\Gamma_1 = [CD] \oplus [DA] \oplus [AB]$$

$$\Gamma_2 = [BC]$$

نلاحظ أن Γ_1 محتوى في $\mathbb{C} \setminus \overline{ox}$

بما أن $\operatorname{Log} z$ :: الفرع الرئيسي التحليلي على $\mathbb{C} \setminus \overline{ox}$ أي قابل للاشتقاق على المنطقة $\mathbb{C} \setminus \overline{ox}$

وأن

$$(\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{ox}$$

$\Leftarrow \operatorname{Log} z$ هو تابع أصلي لـ $f(z) = \frac{1}{z}$ على $\mathbb{C} \setminus \overline{ox}$

"لأن مشتقته عند أي نقطة من هذه المنطقة هو $\frac{1}{z}$"

وبما أن

$\Gamma_1 \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{ox}$ و ~~محصور~~ $\mathbb{C} \setminus \overline{ox}$ مستمر على $f(z) = \frac{1}{z}$

وحسب المبرهنة فإن

$$\int_{\Gamma_1} \frac{1}{z}\, dz = \Big[\operatorname{Log} z\Big]_{C=-1-i}^{B=-1+i}$$

$$= \operatorname{Log}(-1+i) - \operatorname{Log}(-1-i)$$

$$= \operatorname{Ln}|-1+i| + i \operatorname{Arg}(-1+i) - \operatorname{Ln}|-1-i| + i \operatorname{Arg}(-1-i)$$

$$= \cancel{\operatorname{Ln}\sqrt{2}} + i\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cancel{\operatorname{Ln}\sqrt{2}} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right) i$$

$$= \frac{3\pi}{2} i$$

لو ضيع كيز مطلوب لحسب إيجاد الزاوية

أن زاوية $-1+i$ تحسب بالشكل

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

الزاوية	اشارة التخيلي	اشارة الحقيقي
عكس اشارة الزاوية	$-$	$+$
$\pi -$ الزاوية	$+$	$-$
زاوية $+ \pi$	$-$	$-$

ب- العودة للتمرين:

الآن نريد فرع للتابع اللوغاريتمي يكون تحليلي على منطقة تحوي Γ_2 أي المنطقة $\mathbb{C}\setminus o x^+$ ان التابع

$F(z) = \ln|z| + i\theta$ ((قاعدة ربط للتابع اللوغارتمي))

$0 < \theta = \arg z < 2\pi$

وهو فرع تحليلي لـ $\log z$ على $\mathbb{C}\setminus o x^+$

أي أن F تابع أصلي لـ $f(z) = \frac{1}{z}$ على $\mathbb{C}\setminus o x^+$

كما أن $\Gamma_2 \subseteq \mathbb{C}\setminus o x^+$ و $f(z) = \frac{1}{z}$ مستمر على $\mathbb{C}\setminus o x^+$

حسب المبرهنة.

$$\int_{\Gamma_2} \frac{1}{z}\,dz = \underset{\Gamma_2 \text{ نهاية}}{F(-1-i)} - \underset{\Gamma_2 \text{ بداية}}{F(-1+i)}$$

$$= \ln|-1-i| + i\left(5\frac{\pi}{4}\right) - \left(\ln(-1+i) + i\,3\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \ln\sqrt{2} + i\,5\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} - i\,3\frac{\pi}{4}$$

$$= i\,\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} \frac{1}{z}\,dz = \int_{\Gamma_1} \frac{1}{z}\,dz + \int_{\Gamma_2} \frac{1}{z}\,dz$$

$$= 3\frac{\pi}{2}i + i\frac{\pi}{2} = 2\pi i$$

مبرهنة كوشي:

إذا كان f تحليلياً على منطقة G وكان $\bar{D}(a,r) \subseteq G$ وكان $\gamma(t) = a + re^{it}$ « تمثل دائرة مركزها a ونصف قطرها r الممسوحة مرة واحدة بالاتجاه الموجب لأن e^{it} »

$0 \le t \le 2\pi$

عندئذ فإن $\forall z \in D(a,r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Scanned by CamScanner

نتيجة ①:

من المبرهنة نستنتج أن معرفة قيم تابع تحليلي على محيط وداخل قرص عند نقاط المحيط يكفي لمعرفة قيم ذلك التابع عند جميع نقاط داخل القرص

نتيجة ②:

إذا كان f تحليلياً على محيط وداخل دائرة التي مركزها a ونصف قطرها r عندئذ فإن

$\forall z_0 \in D(a,r)$ $\quad \int_{C^+(a,r)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$

$\begin{cases} \omega = z \\ z = z_0 \end{cases}$

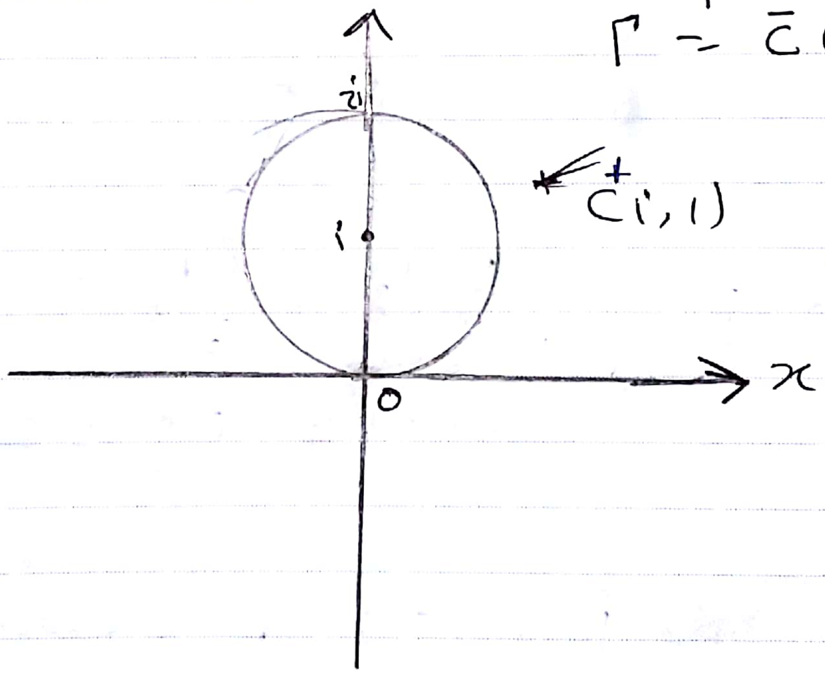
تمرين

احسب التكامل $\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^2+1}\,dz$ في الحالتين

① $\Gamma = C^+(i,1)$

② $\Gamma = C^-(0,2)$

الحل:



المنحنى الأول: $C^+(i,1)$

نرسم المعلم ذو مركز الدائرة $z = i$

$\int_{C^+(i,1)} \frac{\sin z}{z^2+1} = \int_{C^+(i,1)} \frac{\frac{\sin z}{z+i}}{z-i}\,dz$

/ /

١ - ن : $f(z)=\frac{\sin z}{z+i}$ تحليلية على $r=\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ ، f تحليلية على محيط وداخل $C(i,1)$

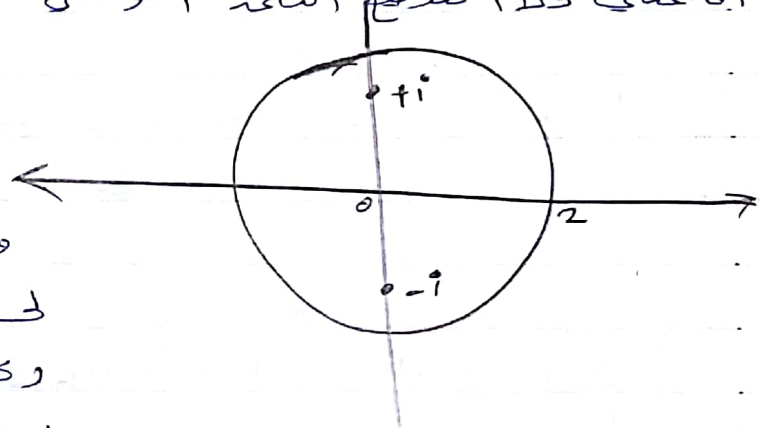
$$\Rightarrow \int_{C^+(i,1)} \frac{\sin z}{z^2+1}\,dz = \int_{C^+(i,1)} \frac{\frac{\sin z}{z+i}}{z-i}\,dz = 2\pi i\, f(i)$$

نعوض في مقطعي البسط $\frac{\sin z}{z+i}$

$$= 2\pi i \,\frac{\sin i}{2i} = \pi \sin i = \pi\, \mathrm{sh}(1)$$

- المنحني التالي: يمثل دائرة نصف قطرها 2 وبما أنه يوجد نقطتين داخل المنحني فلا أستطيع استخدام كوشي لذلك نفرق الكسر

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i}$$



لحساب A نضرب الطرفين بـ $z-i$ ونجعل z تسعى للـ i

لحساب B نضرب الطرفين بـ $z+i$ ونجعل z تسعى للـ $-i$

ومنه $A=\frac{1}{2}i$ ، $B=-\frac{1}{2}i$

و أخيراً نضرب الطرفين بـ $\sin z$ فيصبح لدينا:

$$\frac{\sin z}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{\sin z}{z-i} - \frac{\sin z}{z+i}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{C^-(0,2)} \frac{\sin z}{z^2+1}\,dz = -\int_{C^+(0,2)} \frac{\sin z}{z^2+1}\,dz$$

لأن المبرهنة التكامل فيها على الدائرة بالاتجاه الموجب وهنا الاتجاه سالب لذلك ضربت بـ (-) وجعلتها بالاتجاه الموجب

توضيح

$$= -\frac{1}{2i}\left[\int_{C^+(0,2)} \frac{\sin z}{z-i}\,dz - \int_{C^+(0,2)} \frac{\sin z}{z+i}\,dz\right]$$

حسب مبرهنة

$$= -\frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i \sin i - 2\pi i \sin(-i)\right]$$

$$= -2\pi \sin i$$

مبرهنة تايلور:

إذا كان f تحليلي على قرص $D(z_0,r)$ فإن f قابل للنشر وفق تايلور في ذلك القرص

هذا يعني

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad , \forall z \in D(z_0,r)$$ بل أكثر من ذلك فإن

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

نسمي المتسلسلة في الطرف الأيمن بمتسلسلة أو بنشر تايلور للتابع f في القرص $D(z_0,r)$ أو في جوار z_0

ملاحظة

إن نشر تايلور لتابع تحليلي f في قرص وحيد

وهذا يعني أنه لا يوجد نشرين "متسلسلتين" للتابع نفسه

وبالتالي لو أوجدنا متسلسلة قوى تمثل تابعاً على قرص بطريقة ما فإن هذه المتسلسلة ستكون متسلسلة تايلور للتابع على ذلك القرص

مثال

أوجد نشر تايلور للتابع $f(z) = \frac{1}{1-z}$ في جوار "أي قرص مركزه الصفر"

الحل

إن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ متقاربة بالإطلاق على $D(0,1)$

وإن مجموعها $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \forall z \in D(0,1)$

$$\Leftarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$ هو نشر تايلور في جوار $z=0$

ملاحظة: نسمي نشر تايلور لتابع في جوار الصفر بنشر ماك لوران لذلك التابع

نتائج:

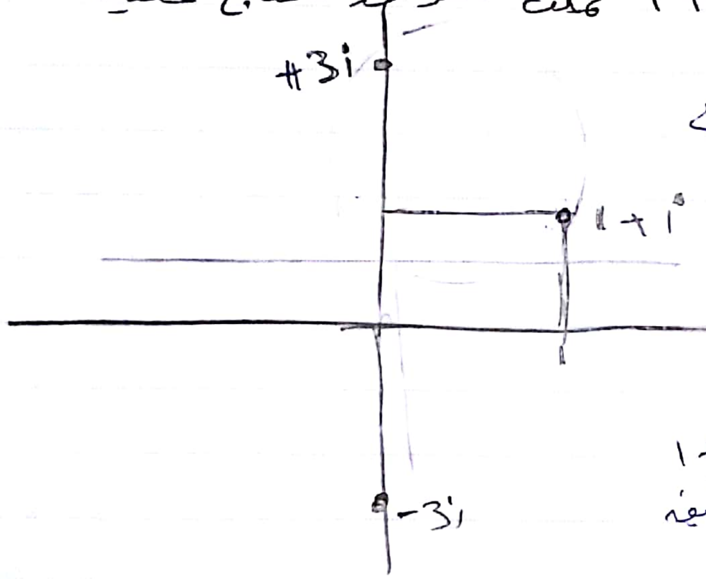
1 اذا كان f تحليلياً عند نقطة فإن f قابل للنشر وفق تايلور في جوار تلك النقطة.

2 إذا كان f تحليلياً على مجموعة مفتوحة G وكانت $z_0 \in G$ فإن f قابل للنشر وفق تايلور في أوسع قرص مركزه z_0 ومحتوى في G

تمرين:

هل التابع $f(z) = \frac{1}{z^2+9}$ قابل للنشر وفق تايلور عند النقطة $1+i$

وما هو أوسع قرص مركزه $1+i$ يمكن نشر هذا التابع عليه



الحل: نعم

بما أن f تحليلي عند $1+i$ فإن f قابل للنشر عند $1+i$

بما أن f تحليلي على $G = \mathbb{C} \setminus \{-3i, +3i\}$

نوجد بعد النقطة $3i$ عن المركز $1+i$

ولإيجاد المسافة بين نقطتين نطرحهما

طويلة العدد

$$|3i - (1+i)| = |2i - 1|$$

$$= \sqrt{(2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

بالتالي أوسع قرص مركزه $1+i$ يمكن نشر التابع وفق تايلور عليه هو

$$D(1+i, \sqrt{5})$$

انتهت المحاضرة

هالة مصطفى

إعداد: كمال الرفاعي