2019/4/15 تابع 2 (3) م

تذكرة :

- تكامل ريمان ستيلجس :

إذا أخذنا $g \in BV([a,b])$

(فضاء الدوال ذات التغير المحدود)

فإن : تغيره : $\overset{b}{\underset{a}{V}}(g) < +\infty$

$$g = g(t)$$

و $x \in C([a,b])$ دالة مستمرة

$$\int_a^b x(t)\, dg(t) = l_g(x) \in \mathbb{R}$$

لأجل كل x استطيع أن أجد المقدار $l_g(x)$

دالي ← $l_g : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto l_g(x) = \int_a^b x(t)\, dg(t)$$

و l_g دالي وهو خطي و محدود .

(أي عن طريق أي دالة ذات تغير محدود أمكننا توليد دالي خطي محدود)

السؤال : هل العكس صحيح ؟ و لماذا ؟

صحيح ، بالاعتماد على مبرهنة ~~...~~ ريس

~~مبرهنة ...~~ .. مبرهنة ريس :

كل دالي خطي محدود f على $C[a,b]$ يمكن تمثيله بتكامل ريمان - ستيلجس

حسب

دالي خطي محدود ← $f : C([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \int_a^b x(t)\, dw(t) \quad , w \in BV([a,b])$$

حيث w ذو تغير محدود على $[a,b]$ ، و تغيره الكلي هو :

$$\text{Var}(w) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(w) = \|f\| \Longleftarrow \text{صحيح}$$

.. فضاءات الجداء الداخلي .. فضاءات هلبرت ..

- ليكن X فضاء متجهي ، نقول عن الدالة $\langle \,,\, \rangle : X\times X \longrightarrow K$

فضاء متجهي

. إنها دالة جداء داخلي إذا تحقق: $(x,y) \longmapsto \langle x,y\rangle$

$x,y,z\in X$

$\alpha\in K$

$\boxed{1}$ $\langle x,x\rangle \geq 0_{\mathbb{R}}$

$\boxed{2}$ $\langle x,x\rangle = 0_{\mathbb{R}} \iff x=0_X$

$\boxed{3}$ $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$

$\boxed{4}$ $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

$\boxed{5}$ $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$ ← المرافق العقدي

- ويحدد الجداء الداخلي على X نظيماً على X بالمساواة:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

- كما يحدد متركاً على X كما يلي:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y,\, x-y\rangle}$$

- إذا كان $K=\mathbb{R}$ ،

فإن $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

نقول أن الجداء الداخلي خطي بالنسبة للمركبة الأولى ونصف خطي (خطي مرافق) بالنسبة للمركبة الثانية.

استناداً إلى الشروط أثبت أن: $\langle x,\alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x,y\rangle$

$$\Longrightarrow \langle x,\alpha y\rangle \underset{(5)}{=} \overline{\langle \alpha y, x\rangle} \underset{(3)}{=} \overline{\alpha\langle y,x\rangle} = \bar{\alpha}\,\overline{\langle y,x\rangle} = \bar{\alpha}\langle x,y\rangle$$

★ - فضاءات الجداء الداخلي :

- هو فضاء متجهي X مزود بجداء داخلي معرف على X.

- فضاءات الجداء الداخلي هي فضاءات منظمة.

★ - فضاء هلبرت :

- هو فضاء جداء تام

- فضاءات هلبرت هي فضاءات باناخ.

- يترتب على الشروط [3] و [4] و [5] الدساتير التالية :

a) $\langle \alpha x + \beta y , z \rangle = \alpha \langle x , z \rangle + \beta \langle y , z \rangle$

b) $\langle x , \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x , y \rangle$

c) $\langle x , \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x , y \rangle + \bar{\beta} \langle x , z \rangle$

- من كل فضاء جداء داخلي يتم توليد نظيم معرف على الشكل التالي :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x , x \rangle}$$

وهو يحقق مساواة غاية في الأهمية :

★★ مساواة متوازي الأضلاع : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

(إثباتها) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y , x+y \rangle + \langle x-y , x-y \rangle$

$= \langle x , x \rangle + \langle x , y \rangle + \langle y , x \rangle + \langle y , y \rangle + \langle x , x \rangle$

$+ \langle x , -y \rangle + \langle -y , x \rangle + \langle -y , -y \rangle$

$= 2 \langle x , x \rangle + 2 \langle y , y \rangle$

$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

- الشرط اللازم والكافي كي يكون نظيم مشتق من فضاء جداء داخلي هو أن يحقق مساواة متوازي الأضلاع.

وليس كل فضاء منظم فضاء جداء داخلي بالضرورة.

أمثلة :

١- الفضاء الإقليدي R^n :

الفضاء R^n هو فضاء هلبرت، حيث:

$$\langle x, y\rangle = \xi_1 \eta_1 + \dots + \xi_n \eta_n$$

وحيث

$$x = (\xi_i) = (\xi_1, \dots, \xi_n) \quad , \quad y = (\eta_i) = (\eta_1, \dots, \eta_n)$$

٢- الفضاء الوحدي C^n :

إن الفضاء C^n هو فضاء هلبرت، حيث مزود بالجداء المعرف بالدستور:

$$\langle x, y\rangle = \xi_1 \bar{\eta}_1 + \dots + \xi_n \bar{\eta}_n \longrightarrow \star$$

نستنتج من $\star$ أن النظيم هو:

$$\|x\| = (\xi_1 \bar{\xi}_1 + \dots + \xi_n \bar{\xi}_n)^{1/2}$$

$$= \sqrt{(|\xi_1|^2 + \dots + |\xi_n|^2)}$$

٣- الفضاء $L^2[a,b]$:

فضاء الدوال القابلة للمكاملة تربيعياً على $[a,b]$ $\rightarrow$ $\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt$ الجداء الداخلي

أو يمكن كتابة الجداء بالشكل:

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\, \overline{y(t)}\, dt$$

٤- فضاء متتاليات هلبرت ℓ^2 :

مزود بالجداء الداخلي :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \bar{\eta}_i$$

٥ـ الفضاء ℓ^p :

عندما $p = 2 \Leftarrow$ فضاء جداء داخلي

وعندما $p \neq 2 \Leftarrow$ ليس فضاء جداء داخلي

برهن أن الفضاء ℓ^p ~~[illegible]~~ ليس فضاء جداء داخلي عندما $p \neq 2$

ليس فضاء جداء داخلي. الحل: لو أخذنا:

$x = (1, -1, 0, 0, \ldots)$

$y = (1, 1, 0, \ldots)$

$x + y = (2, 0, \ldots)$ ، $x - y = (0, 2, \ldots)$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$\|x\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$ $\qquad \|y\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$

$\|x+y\|_p = 2$ ، $\|x-y\| = 2$

$$L_1 = 4 + 4 \overset{?}{=} 2\left((2^{\frac{1}{p}})^2 + (2^{\frac{1}{p}})^2\right)$$

$$8 \overset{?}{=} 2\left(2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}}\right)$$

$$8 \neq 2 \cdot 2 \cdot 2^{\frac{2}{p}} = 2^{\frac{2}{p}+2}$$

لذا متساوية متوازي الأضلاع غير محققة

٦ـ الفضاء $C[a, b]$:

ليس فضاء جداء داخلي حيث $\|x\| = \max_{a \le t \le b} |x(t)|$

إذا أخذنا ; $x(t) = 1$

، $y(t) = \dfrac{t - a}{b - a}$

$$x(t) + y(t) = 1 + \frac{t-a}{b-a}$$

$$x(t) - y(t) = 1 - \frac{t-a}{b-a}$$

لذا نجد أن: $\|x-y\| = 1$

$\|x+y\| = 2$,

⟸ مساواة متوازي الأضلاع غير محققة

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 5 \neq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4$$

- إذا كان $(X, \|\cdot\|)$ فضاء منظم نظامياً:

$\|\cdot\| = \sqrt{<\cdot,\cdot>}$

مشتق من فضاء جداء داخلي ⟺ يحقق مساواة متوازي الأضلاع

البرهان: (هنا عرفنا النظيم استناداً إلى الجداء)

⟸ تم اثباته في الصفحة رقم (٣) العلاقة (**)

⟸ لكن $f(x,y) = \frac{1}{4} \sum_{k \in J} i^k \|x + i^k y\|^2$

- إذا كان معرف على R:

نأخذ $J = \{0, 2\}$

⟸ $f(x,y)$ هو جداء داخلي

(هنا عرفنا الجداء استناداً إلى النظيم)

$$<x,y> = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \quad , \quad \boxed{i^2 = -1}$$

- في حال كان معرف على $\mathbb{C}$:

نأخذ : $J = \{0, 1, 2, 3\}$

$\Leftarrow$ $f(x,y)$ هو جداء داخلي.

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-iy\|^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\underbrace{\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)}_{Re\langle x,y\rangle} + i\underbrace{\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)}_{Im\langle x,y\rangle}\right]$$

و.هـ.م

مسائل :

قبل البدء سنورد تعريف من أهم تعاريف هذا البحث :

تعريف التعامد :

- ليكن $(X, \langle , \rangle)$ فضاء جداء داخلي ، وليكن $x, y \in X$

نقول عن x إنه يعامد y ونكتب $x \perp y$ إذا وفقط إذا:

$$x \perp y \iff \langle x, y\rangle = 0_K$$

ونقول أن X يتعامد مع المجموعة $A \subseteq X$ إذا كان يعامد كل عنصر من عناصرها أي :

$$A \subseteq X \,,\; X \perp A \iff \forall a \in A : X \perp a$$

ونقول أن المجموعتين $A, B \subseteq X$ إنهما متعامدتان إذا:

$A, B \subseteq X \quad , \quad A \perp B \iff \forall a \in A \,, \forall b \in B$

$a \perp b$ ؛

تمرين: (مبرهنة فيثاغورث):

إذا كان $x \perp y$ في فضاء جداء داخلي X فبين أن:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

الحل:

$x, y \in X$,

$x \perp y \Longrightarrow L_1 = \|x+y\|^2 = \langle x+y \,, x+y \rangle$

$$= \langle x, x\rangle + \underbrace{\langle x, y\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y, x\rangle}_{=0} + \langle y, y\rangle$$

بسبب تعامد $x \perp y$

$$= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 = L_2$$

$\Longleftarrow$ محققة.

والعكس صحيح في $\mathbb{R}$ وغير صحيح في $\mathbb{C}$

تمرين:

إذا كان فضاء جداء داخلي X حقيقياً، فبين أن الشرط $\|x\| = \|y\|$ يقتضي أن يكون $\langle x+y \,, x-y \rangle = 0$،
ما هو المعنى الهندسي لهذا إذا كان $X = \mathbb{R}^2$؟
وما الذي يقتضيه هذا الشرط إذا كان عقدياً؟

الحل:

$$\langle x+y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,-y\rangle$$

$$= \underbrace{\|x\|^2 - \|y\|^2}_{=0} + \underbrace{\langle x,y\rangle - \langle x,y\rangle}_{=0} = 0$$

لأن $\|x\| = \|y\|$

المعنى الهندسي هو الخاصة:

قطرا المعين متعامدان...

END...

2019/4/16 تابعي 2 [9 م]

تمهيدية (استمرار الجداء الداخلي):

إذا كان $x_n \to x$ و $y_n \to y$ في فضاء جداء داخلي، فإن $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$

البرهان:

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle|$$

حسب خواص الجداء الداخلي والقيمة المطلقة

$$\leq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle|$$

حسب كوشي شفارتز

$$\leq \underbrace{\|x_n\|}_{\text{محدود}} \cdot \underbrace{\|y_n - y\|}_{\to 0} + \underbrace{\|x_n - x\|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|y\|}_{\text{محدود}} \to 0$$

وذلك لأن $x_n - x \to 0$ وكان $y_n - y \to 0$

عند $n \to \infty$.

مثال:

لدينا الفضاء المنظم $C[a,b]$ فضاء منظم وغير تام

واتمام هذا الفضاء هو $L^2[a,b]$ حيث $L^2[a,b]$ هو فضاء باناخ، وذلك إنه يمكن توسيع النظيم على X والعمليتين على الفضاء المتجهي إلى تمام X

حيث $L^2[a,b]$ هو فضاء جداء داخلي تام.

L^2 فضاء الدوال القابلة للمكاملة تربيعياً.

/ /

مبرهنة: يوجد لأي فضاء جداء داخلي X فضاء لهلبرت H وايزومورفيزم A من X على فضاء جزئي كثيف W في H.
إن الفضاء H وحيد إذا ما استثنينا الايزومورفيزمات.

مبرهنة: ((الفضاء الجزئي))

ليكن Y فضاء جزئياً من فضاء هلبرت H. عندئذٍ تصح الدعاوى التالية:

(1) Y تاماً $\Longleftrightarrow$ Y مغلقاً في H

(2) إذا كان Y منتهي البعد، فإنه تام.

(3) إذا كان H فصولاً فإن Y كذلك، وبوجه أعم كل مجموعة جزئية من فضاء جداء داخلي فصول فصولة.

البرهان (3):

لأن الفضاء الفصول يحوي مجموعة معدودة وكثيفة
$\Leftarrow$ من أجل كل فضاء جزئي Y من H
ستحوي جزء من المجموعة الكثيفة
$\Leftarrow$ ستكون فصولة.

END ...