(1)

العضاء الشعاعي : $\mathbb{R}^n$

نقصد بالرمز $\mathbb{R}^n$ بأنه الجداء الديكارتي لـ $\mathbb{R}$ n مرة.

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{ M = (x_1, x_2, \dots, x_n) \}$$

مجموعة النقاط M من (مجموعة المساقط)

كرو

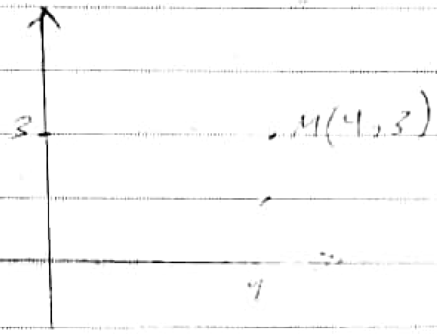
صيف

$; x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$

نقصد بالفضاء الشعاعي , بأنه صفوف التكافؤ للأشعة التي بدايتها النقطة O ((المبدأ O) ونهايتها النقطة M

النقاط $\mathbb{R}^n$ ←

$$\mathbb{R}^n = \{ [\vec{OM}]; \ M \in \mathbb{R}^n \}$$



$$\vec{OM} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$$

إذا كان

$A(1, 2) \qquad B(5, 5)$

← $\vec{AB}(4, 3)$ شعاع

ويكافئ الشعاع $\vec{AM}$

$A(1, 0) \quad B(5, 3)$

* صفوف التكافؤ : هي جميع الأشعة التي لها نفس الطول ونفس الجهة.

$$\frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = \frac{-2}{-1}$$ كسور متكافئة

الفضاء الشعاعي : (ليس عبارة عن أشعة)

هنالك فضاءات شعاعية ليست أشعة

$M_n(\mathbb{R})$ فضاء المصفوفات المربعة من المرتبة n

$(-1)^n = \frac{1}{n} = \infty$ فضاء المتتاليات المحدودة.

$(-n)$ ليست متتالية محدودة.

★ الفضاء الشعاعي (بالجبر الخطي)

هو $M \ \Sigma$ التي تحقق 8 شروط

الفضاء الشعاعي عناصرها ليست أشعة

★ كيف يمكن تمثيل الفضاء الشعاعي:

اذا كانت $n=1$ أي $\mathbb{R}^1$ فضاء شعاعي احادي البعد

يمثل هندسياً مستقيم الأعداد الحقيقية

اذا كانت $n=2$ أي $\mathbb{R}^2$ هو فضاء شعاعي ثنائي البعد

يمثل هندسياً بالمستوي الإقليدي (oxy)

إذا كانت $n=3$ أي $\mathbb{R}^3$ هو فضاء شعاعي ثلاثي البعد

يمثل هندسياً بالفراغ (فضاء مادي)

اذا كانت $n \geq 4$ هذا الفضاء هندسياً غير موجود

(لا يمكن تمثيل فضاء له بعد رباعي)

ليس لدي تصور هندسي فوق $n=3$ لكن جبرياً نتعامل معه

وأشرح به توابع (أرسمها جبرياً) فقط ^^

(٣)

الجمع:

$\vec{u} + \vec{v} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$

$\lambda \vec{u} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

★ تمرين:

ليكن

$\mathbb{R}^5 \ni \vec{u} = (2,1,-3,5,4)$

$\vec{v} = (1,4,-1,3,2)$

أوجد $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$

$\|3\vec{u} - \vec{v}\|$ $\|2\vec{u} + 3\vec{v}\|$

الحل:

$\|\vec{u}\| = \sqrt{4+1+9+25+16}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{55}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{1+16+1+9+4} = \sqrt{31}$

★ حساب $\|2\vec{u} + 3\vec{v}\|$

$2\vec{u} = (4, 2, -6, 10, 8)$

$3\vec{v} = (3, 12, -3, 9, 6)$

$2\vec{u} + 3\vec{v} = (7, 14, -9, 19, 14)$

$$\| \lambda \vec{u} \| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + \dots + (\lambda x_n)^2}$$

$$\| \lambda \vec{u} \| = \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_2^2 + \dots + \lambda^2 x_n^2}$$

$$\| \lambda \vec{u} \| = \sqrt{\lambda^2 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}$$

$$\| \lambda \vec{u} \| = |\lambda| \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

ونعلم أن $\| \vec{u} \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

$\Leftarrow$

$$\| \lambda \vec{u} \| = |\lambda| \, \| \vec{u} \|$$

وهو المطلوب.

(٥)

الجداء الداخلي . ينقل من فضاء شعاعي الى قيمة عددية.

جداء داخلي وهو عبارة عن عدد حقيقي

مغلق ← مستمر ←

★ ويبرهن أن :

① $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

② $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - v\|^2\right)$

③ $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

إثبات ① ننطلق من الطرف الثاني :

$$\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\left((x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + \dots + (x_n+y_n)^2\right) - \left(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2\right) - \left(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2\right)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\left(x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2\right) + \left(x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2\right) + \dots + \left(x_n^2 + 2x_ny_n + y_n^2\right)$$

$$- x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 - y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_n^2\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2x_1y_1 + 2x_2y_2 + \dots + 2x_ny_n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\left(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n\right)\right)$$

$$= x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \vec{u}.\vec{v}$$

وهو المطلوب ...

(٦)

★ إثبات ②

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

حسب إثبات ①

تغيير محتمل:

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{w}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{w}\|^2\right)$$

$$\vec{w} = -\vec{v}$$

$$\vec{u}\cdot(-\vec{v}) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|-\vec{v}\|^2\right)$$

$$-\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

نضرب طرفي المساواة بإشارة ناقص:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

وهو المطلوب.

★ إثبات ③ نجمع ① و ②

① $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$ +

② $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

$$2\,\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right) \quad \div 2$$

نقسم على ②

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

وهو المطلوب.

$\vec{u'}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\ \|\cancel{\vec{v}}\| \cdot \frac{\|\vec{u'}\|}{\cancel{\|\vec{v}\|}}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\ \|\vec{u'}\| \cdot \cos(0)$$

يُقصد بالجداء الداخلي : $\vec{u}\cdot\vec{v}$

هو طويلة المسقط للشعاع الثاني $\|\vec{u'}\|$ مضروب بطويلة الثاني

ملاحظة هامة جداً للجداء الداخلي :

$\vec{u},\vec{v} \neq 0$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

فإن $\vec{u} \perp \vec{v}$

فإذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

بشرط $\vec{v} \neq 0$ ، $\vec{u} \neq 0$

فالشعاعان متعامدان . $\Leftarrow \cos\theta = 0$

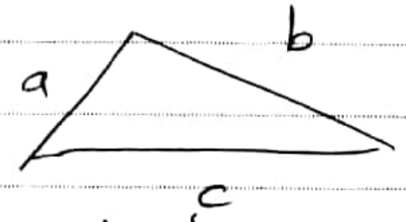
وظيفة: برهن أن:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

$$\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| =$$

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$$

ملاحظة: إذا كانت الأشعة $\vec{v}$ ، $\vec{u}$ تشكل مثلث $\Leftarrow$ حتماً $a < b+c$



(أي ضلع بالمثلث هو أصغر من مجموع الضلعين الباقيين

مثال: $3, 5, 7$ يشكل مثلث

بينما $3, 4, 7$ لا يشكل مثلث

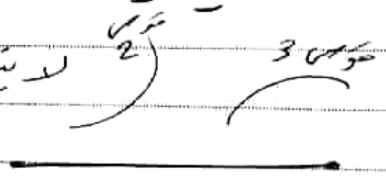
إذا كان:

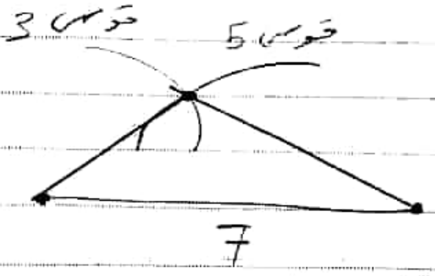
$a = 3 \quad c = 7$

$b = 2$

← لا يمكن إنشاء مثلث

لا يتقاطعا





★ $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

$\Updownarrow$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً

★ الارتباط الخطي للأشعة:

ليكن $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

تعريف أساسي

نقول عن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أنهما مرتبطان خطياً إذا تحقق الشرط:

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = 0$$

فإن $\alpha ، \beta$ ليسا صفرين معاً

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v}$$

$$K = -\frac{\beta}{\alpha} \iff \vec{u} = K\vec{v}$$

$$\iff (x_1, x_2, \dots, x_n) = (Ky_1, Ky_2, \dots, Ky_n)$$

$$\iff x_i = K y_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$K = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_n}{y_n} \iff x_i = K y_i$$

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة .

ليكن $\vec{w} , \vec{v} , \vec{u} \in \mathbb{R}^n$ نقول عن الأشعة أنها مرتبطة خطياً إذا تحقق الشرط :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0$$

فإن α , β , γ ليست أصفاراً معاً

$$\Leftrightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0$$

$$\vec{u} = \frac{-\beta}{\alpha}\vec{v} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{w}$$

$$a = \frac{-\beta}{\alpha} \text{ ، } b = \frac{-\gamma}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$$

- تمرين : ليكن $\vec{u}(1, -1, 0, 2, 5)$

(١٠)

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة .

ليكن $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$ نقول عن الأشعة أنها مرتبطة خطياً إذا تحقق الشرط :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0$$

فإن α, β, γ ليست أصفاراً معاً

$$\Leftrightarrow \quad \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0$$

$$\underbrace{\vec{u} = \frac{-\beta}{\alpha}\vec{v} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{w}}$$

$$a = \frac{-\beta}{\alpha} \quad , \quad b = \frac{-\gamma}{\alpha}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$$

★ تمرين : ليكن

$\vec{u}(1, -1, 0, 2, 5)$

$\vec{v}(-1, 2, 3, 0, 1)$

$\vec{w}(3, -4, -3, 4, 9)$

$\vec{z}(3, 0, 3, -1, 2)$

① هل الأشعة $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ مرتبطة خطياً

② هل الأشعة $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$ مستقلة خطياً

①
$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\\5\end{pmatrix} \quad \vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\0\\1\end{pmatrix} \quad \vec{w}\begin{pmatrix}3\\-4\\-3\\4\\9\end{pmatrix} \quad \vec{z}\begin{pmatrix}3\\0\\3\\-1\\2\end{pmatrix}$$

المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطان خطياً، لأن أحدهما لا ينتج عن الآخر بضربه بعدد حقيقي.

$$\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \\ 2\alpha \\ 5\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\beta \\ 2\beta \\ 3\beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

① $3 = \alpha - \beta$

② $-4 = -\alpha + 2\beta$

③ $-3 = 3\beta \Rightarrow \boxed{\beta = -1}$

④ $4 = 2\alpha \rightarrow \boxed{\alpha = 2}$

⑤ $9 = 5\alpha + \beta$

نعوض α و β في ①

$3 = 2 + 1$ المساواة صحيحة

نعوض α و β في ②

$-4 = -2 - 2$ المساواة صحيحة

نعوض α و β في ⑤

$9 = 10 - 1$ المساواة صحيحة

← جملة المعادلات متحققة

∴ الأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ مرتبطة خطياً

---

② $\vec{z} = \alpha(\vec{u}) + \beta\vec{v}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \\ 2\alpha \\ 5\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\beta \\ 2\beta \\ 3\beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

① $3 = \alpha - \beta$

② $0 = -\alpha + 2\beta$

③ $3 = 3\beta \Rightarrow \boxed{\beta = 1}$

④ $-1 = 2\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{-1}{2}}$

⑤ $2 = 5\alpha + \beta$

نعوض α و β في المعادلات ① و ② و ⑤

المساواة غير محققة $3 \neq -\frac{1}{2} - 1$

← الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{z}$ غير مرتبطة خطياً

أي مستقلة خطياً

★ شعاع الواحدة :

ليكن $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ نقول عن $\vec{u}$ أنه شعاع واحدة

إذا تحقق ما يلي : $\|\vec{u}\| = 1$

أمثلة : $\vec{u}\,(1,0) \in \mathbb{R}^2$

$\vec{v}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{2}\right) \in \mathbb{R}^4$

$\vec{w}\left(\frac{\sqrt{3}}{5}, 0, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0, \frac{\sqrt{2}}{5}\right) \in \mathbb{R}^6$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{1+0} = 1$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4}} = 1$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{\frac{3}{25} + 0 + \frac{16}{25} + \frac{4}{25} + 0 + \frac{2}{25}} = 1$

ليكن $\vec{u} = \mathbb{R}^n$ نعرف الشعاع $e_{\vec{u}}$ بأنه شعاع الواحدة المرتبط خطياً مع الشعاع $\vec{u}$

الاستنتاج

$$e_{\vec{u}} = k\vec{u}$$

$$\|e_{\vec{u}}\| = \|k.\vec{u}\|$$

$$1 = |k|\ \|\vec{u}\|$$

ولنفرض $k > 0$

$$1 = k\ \|\vec{u}\|$$

$$k = \frac{1}{\|\vec{u}\|}$$

لو k سالبة $k<0$ ⇐ أقوم بوضع إشارة الناقص للشعاع $\vec{u}$

$$\Rightarrow e_{\vec{u}} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

تمرين: (1) $\vec{u} = (1, 5, 0, 3, -1) \in \mathbb{R}^5$ أوجد $e_{\vec{u}}$

(2) $\vec{v}(3, 0, 4) \in \mathbb{R}^3$ أوجد $e_{\vec{u}}$

(1)

$$e_{\vec{u}} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$$

$$e_{\vec{u}} = \frac{1}{\sqrt{26+9+1}} = \frac{1}{6}(1, 5, 0, 3, -1)$$

$$e_{\vec{u}} = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0, \frac{3}{6}, \frac{-1}{6}\right)$$

(2)

$$e_{\vec{u}} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{9+0+16}}\vec{v}$$

$$e_{\vec{u}} = \frac{1}{5}(3, 0, 4) = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$$

س3 عين الزاوية θ بين الشعاعين

$\vec{u}(5, 3, -1)$

$\vec{v}(5, 6, -3)$

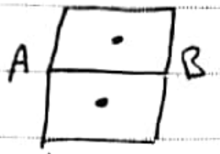
س4 ليكن

$A(x_A, y_A)$

$B(x_B, y_B)$

عين إحداثيات النقطة O مركز المربع الذي ضلعه AB

(يوجد مثلثان)



س5 هل يمكن إنشاء مثلث قائم مساحته 7 وطول وتره 6

انتهت المحاضرة الأولى

تمارين وظيفة :

س١

$\vec{u}(1,2,-1,0,4)$

$\vec{v}(2,-1,3,1,-2)$

احسب $\vec{u}.\vec{v}$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\| - \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|\right)$$

$$\vec{u}+\vec{v} = (3,1,2,1,2)$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1+4+1+16} = \sqrt{22}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4+1+9+1+4} = \sqrt{19}$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{9+1+4+1+4} = \sqrt{19}$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{19}^2 - \sqrt{22}^2 - \sqrt{19}^2\right)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{-1}{2}(22) = -11$$

س٢ :

$$\vec{u}+\vec{v} = (1,3,0,5,-1)$$

$$\vec{u}-\vec{v} = (-1,0,-1,2,0)$$

احسب $\vec{u}.\vec{v}$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}\left((1+9+25+1)-(1+1+4)\right)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}(36-6) \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = \frac{30}{4} = 7.5$$