◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: العشرون   عنوان المحاضرة: حل مسائل

سنقوم بهذه المحاضرة أصدقائي بحل بعض المسائل تطبيق لما أخذناه بالمحاضرات السابقة ..

"مسألة محلولة صفحة 116 "

$(o_1x_1y_1)$ محوران متعامدان في مستو ثابت ، (Δ) مستقيم يتدحرج دون انزلاق على محيط دائرة ثابتة مركزها (o_1) نصف قطرها (1) بحيث تبقى السرعة الزاوية لدوران النقطة (c) تماس المستقيم (Δ) مع الدائرة $(o_1,1)$ بحيث تبقى السرعة الزاوية ثابتة وتساوي (ω) . (M) نقطة مادية تتحرك على (Δ) بحركة منتظمة سرعتها (v) ثابتة ، كان المستقيم (Δ) في لحظة البدء مماساً للدائرة في النقطة $A(1,0)$ وكانت (M) في النقطة (A) ، أي A, M, c منطبقة في لحظة البدء

والمطلوب : **1-** عين الإحداثيات المطلقة للنقطة (M) بدلالة الجملة $(o_1x_1y_1)$

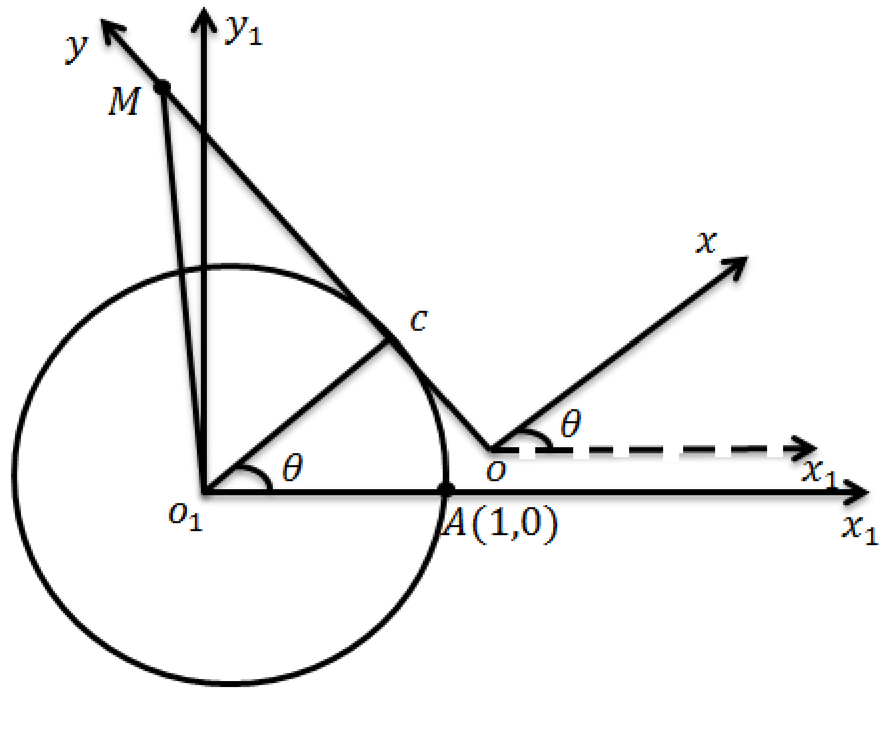
2- عين السرعة المطلقة والتسارع المطلق للنقطة (A)

3- عين العلاقة التي تربط (v) بـ (ω) كي يكون $(\overrightarrow{\Gamma_a})$ محمولا على (Δ) .

الحل

إن حركة (M) هي محصلة حركتين **حركة نسبية** وهي حركتها على المستقيم (Δ) **وحركة جرية** مع المستقيم (Δ) وهي حركة مستوية . بما أن حركة (Δ) تتدحرج دون انزلاق فإن نقطة التماس (c) هي المركز الآني للدوران في الحركة المستوية :

نختار النقطة (o) مبدأ الاحداثيات للجملة المتماسكة مع المستقيم (Δ) التي كانت فيه النقطة (A) لحظة البدء .



فمن شرط التدحرج دون انزلاق نلاحظ أن المسافة التي تقطعها نقطة التماس (c) " **المركز الآني للدوران**" على المستقيم (Δ) "وهو المتدحرج" تساوي المسافة التي تقطعها النقطة (c) على الدائرة $(o_1, 1)$ "القاعدة" أي أن طول $(\overline{oc})$ يساوي طول القوس $(\widehat{Ac})$ فإذا سمينا الزاوية بين (o_1c) و (o_1x_1) هي (θ) كان لدينا $\overline{oc} = (\widehat{Ac}) = \theta$ (لأن نصف قطر الدائرة يساوي الواحد)

نختار المحور (oy) منطبقا على (Δ) والمحور (ox) العمود على (Δ) في النقطة (o) .

1- لتعيين موضع النقطة (M) نكتب :

$$\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1c} + \overrightarrow{cM}$$

إن $\overrightarrow{cM}$ هي عبارة عن $\overrightarrow{oM} - \overrightarrow{oc}$ ومنه $\overrightarrow{co} + \overrightarrow{oM}$ وبالتعويض في $(*)$ نجد :

$$\Rightarrow \overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1c} + \overrightarrow{co} + \overrightarrow{oM}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{o_1M} = 1(\cos\theta\,\vec{\imath_1} + \sin\theta\,\vec{\jmath_1}) + co\vec{\jmath} + oM\vec{\jmath}$$

ولأن الحركة تتدحرج دون انزلاق ((فالمسافة المقطوعة على القاعدة تساوي المسافة المقطوعة على المتدحرج)) أي أن :

$$|\widehat{Ac}| = |\overline{co}| = r.\theta$$

$$\theta' = \omega \ \Rightarrow \theta = \omega t$$

$$\overrightarrow{o_1M} = \int v.dt = v.t + c$$

من شروط البدء $t = 0 \ , \ \overrightarrow{o_1M} = 0 \quad \Rightarrow c = 0$

$$\overrightarrow{oM} = v.t\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{co} = -\omega.t\vec{\jmath}$$

نعلم أن : $\vec{\jmath} = -\sin\theta\,\vec{\imath_1} + \cos\theta\,\vec{\jmath_1}$

$$\Rightarrow \vec{\jmath} = -\sin\omega t\,\vec{\imath_1} + \cos\omega t\,\vec{\jmath_1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{o_1M} = \cos\omega t\,\vec{\imath_1} + \sin\omega t\,\vec{\jmath_1} - (v-\omega)t.\sin\omega t\,\vec{\imath_1} + (v-\omega)t.\cos\omega t\,\vec{\jmath_1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{o_1M} = (\cos\omega t - (v-\omega)t.\sin\omega t)\vec{\imath_1} + (\sin\omega t + (v-\omega)t.\cos\omega t)\vec{\jmath_1}$$

بالاشتقاق المباشر نحصل على $(\overrightarrow{V_a})$ و $(\overrightarrow{\Gamma_a})$

أو عن طريق تركيب الحركات

إن حركة (M) على المستقيم هي حركة نسبية وبالتالي :

$$\overrightarrow{V_r}(M) = v\vec{\jmath}$$

وهي حركة مستوية $(o_1x_1y_1)$ بالنسبة لـ (Δ) مع (M) وهي (الحركة الجرية)

وبالتالي السرعة الجرية في الحركة المستوية هي :

$$\overrightarrow{V_e}(\mathrm{M}) = \vec{V}(o) + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{o_1M} \quad \text{أو} \quad \overrightarrow{V_e}(M) = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{cM}$$

$$\vec{V_e}(\mathrm{M}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & (v-\omega)t & 0 \end{vmatrix} \Longrightarrow \vec{V_e}(\mathrm{M}) = -\omega(v-\omega)t\vec{\imath}$$

وبالتالي السرعة المطلقة هي مجموع السرعتين الجرية و النسبية

$$\vec{V_a}(\mathrm{M}) = \vec{V_r} + \vec{V_e}$$

$$\Longrightarrow \vec{V_a}(\mathrm{M}) = -\omega(v-\omega)t\vec{\imath} + v\vec{\jmath}$$

وللحصول على التسارع نطبق القانون التالي :

$$\vec{\Gamma_a}(M) = \left.\frac{d\vec{V_a}(M)}{dt}\right|_M + \vec{\omega} \wedge \vec{V_a}(M)$$

$$\Longrightarrow \vec{\Gamma_a}(M) = -\omega(v-\omega)\vec{\imath} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega(v-\omega)t & v & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \vec{\Gamma_a}(M) = [-\omega(v-\omega) - v\omega]\vec{\imath} - \omega^2(v-\omega)t\vec{\jmath}$$

كي يحمل $\vec{\Gamma_a}(M)$ على (Δ) يجب أن تكون المركبة على (x) معدومة لذلك نكتب

$$-\omega(v-\omega) - v\omega = 0$$

$$\Longrightarrow v - \omega = -v \Longrightarrow 2v = \omega \Longrightarrow v = \frac{\omega}{2}$$