معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثانية

المعادلات التفاضلية1

المحاضرة 4

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2019-2023

◄ دكتور المادة: خليل تحيى

نظري

◄ عنوان المحاضرة: المعادلات التي ترد لمتجانسة ◄المحاضرة : الرابعة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- المعادلات التفاضلية التي ترد الى متجانسة
2- امثلة شاملة

المعادلات التفاضلية التي ترد الى متجانسة

- يمكن حل بعض المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى بردها الى معادلة متجانسة قابلة للفصل وبالتالي إيجاد الحل العام لها
- و هذه المعادلات من الشكل $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \dots (*)$

او من الشكل $f_1(ax+by+c)dx + f_2(a_1x+b_1y+c_1)dy = 0$

حيث نلاحظ ان : $D_1 = ax+by+c$

$D_2 = a_1x+b_1y+c_1$

حيث يكون D_1, D_2 معادلتين لمستقيمين في المستوي oxy

و**نميز هنا ثلاث حالات** :

❖ الحالة الأولى:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \lambda$$

وفي هذه الحالة نلاحظ أن المستقيمان D_1 و D_2 منطبقان وبالتالي ترد المعادلة التفاضلية الى الشكل

$$y' = f(\lambda) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(\lambda) \Rightarrow dy = f(\lambda).dx$$

$$\Rightarrow \boxed{y = x.f(\lambda) + c}$$

حيث $f(\lambda) = const$ وهو الحل العام.

❖ الحالة الثانية:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$$

وفي هذه الحالة يكون المستقيمان D_1 و D_2 متوازيان ولحل هذه المعادلة نجري التحويل التالي:

$$z = ax + by$$

وبتفاضل الطرفين يكون:

$$dz = a.dx + b.dy \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \xrightarrow[\text{حسب}(*)]{} \frac{dz}{dx}$$

$$= a + b.f\left(\frac{z+c}{z+c_1}\right) \Rightarrow$$

$$dx = \frac{dz}{a + b.f\left(\frac{z+c}{z+c_1}\right)}$$

وهذه المعادلة منفصلة المتحولات..

❖ الحالة الثالثة:

$$\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$$

في هذه الحالة يكون المستقيمان D_1 و D_2 متقاطعان وعندها يمكن كتابة معادلتي المستقيم كمعادلتين خطيتين متجانستين ، وذلك بنقل المحاور إلى نقطة تقاطعهما (يجب إيجاد نقطة التقاطع)

وبالتالي إذا فرضنا أنَّ $M(\alpha,\beta)$ هي نقطة التقاطع، نأخذ التحويل التالي ، باستخدام دساتير الانسحاب:

$$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$$

وبعد ذلك نفرض التحويل: $\boldsymbol{z = \frac{y}{x}}$

ثمّ نعوّض بالمعادلة فنحصل على معادلة قابلة للفصل أو(معادلة ترد إلى معادلة قابلة للفصل) ومن ثمّ نوجد الحل العام.

أمثلة:

اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية:

1- $(x - y + 1)dx + (x - y + 2)dy = 0$

الحل:

لدينا المستقيمان:

$$D_1 : x - y + 1$$
$$D_2 : x - y + 2$$

نلاحظ أنَّ: $\frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{1}{2}$ إذاً فالمستقيمان D_1 و D_2 متوازيان

بفرض: $z = x - y$ بالتفاضل $\Leftarrow dz = dx - dy \Leftarrow dy = dx - dz$

نعوض في المعادلة:

$$\Rightarrow (z+1).dx + (z+2)(dx - dz) = 0$$

$$\Rightarrow z.dx + dx + z.dx + 2.dx - z.dz - 2.dz = 0$$

$$\Rightarrow (2z+3).dx - (z+2).dz = 0$$

$$\Rightarrow dx = \frac{z+2}{2z+3}.dz$$

نضرب ونقسم على 2 :

$$\Rightarrow dx = \frac{2z+4}{2(2z+3)}.dz = \frac{2z+3+1}{2(2z+3)}.dz = \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2z+3}\right].dz$$

نكامل الطرفين:

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{2}.\frac{2}{2z+3}\right).dz$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}ln|2z+3| + ln|c|$$

نعود فنعوض قيمة z :

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(x-y) + \frac{1}{4}ln|2(x-y)+3| + ln|c|$$

وهو الحل العام.

$$y' = \frac{3x-y+5}{x+y-1}$$

الحل:

لدينا المستقيمان:

$$D_1 : \ 3x - y + 5$$
$$D_2 : \ x + y - 1$$

نلاحظ أنَّ: $\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{5}{-1}$ إذاً فالمستقيمان D_1 و D_2 متقاطعان

ولإيجاد نقطة التقاطع $M(\alpha,\beta)$ نحل جملة معادلتيهما حل مشترك:

من معادلة D_2 نجد: $x = -y + 1 \dots (*)$

نعوض $(*)$ في معادلة D_1: $-3y + 3 - y + 5 = 0$

$$\Rightarrow -4y = -8 \Rightarrow y = 2$$

نعوض قيمة y في $(*)$: $x = -2 + 1 \Rightarrow x = -1$

ومنه فنقطة التقاطع هي: $M(-1,2)$

والآن نجري التحويل:

$$\begin{cases} x = X + \alpha \Rightarrow x = X - 1 \Rightarrow dx = dX \\ y = Y + \beta \Rightarrow y = Y + 2 \Rightarrow dy = dY \end{cases}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية:

$$y' = \frac{3(X-1) - (Y+2) + 5}{(X-1) + (Y+2) - 1} = \frac{3X - Y}{X + Y}$$

نقسِّم البسط والمقام على $X \neq 0$:

$$\Rightarrow y' = \frac{3 - \frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}}$$

نفرض: $Z = \frac{Y}{X} \Leftarrow Y = Z.X \Leftarrow Y' = Z + XZ'$

نعوض في المعادلة التفاضلية:

$$\Rightarrow Z + XZ' = \frac{3 - Z}{1 + Z} \Rightarrow XZ' = \frac{3 - Z}{1 + Z} - Z$$

$$\Rightarrow X\frac{dZ}{dX} = \frac{3 - Z - Z - Z^2}{1 + Z} = \frac{-Z^2 - 2Z + 3}{1 + Z}$$

وهي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات..

$$\Rightarrow \frac{X}{dX} = \frac{-Z^2 - 2Z + 3}{1 + Z} . \frac{1}{dZ} \Rightarrow -\frac{dX}{X} = \frac{Z + 1}{Z^2 + 2Z - 3} . dZ$$

$$\Rightarrow -\frac{dX}{X} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2Z+2}{Z^2+2Z-3}.dZ$$

نكامل الطرفين:

$$\Rightarrow -\ln|X| + \ln|c| = \frac{1}{2}\ln|Z^2+2Z-3|$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{c}{X}\right| = \ln|Z^2+2Z-3|^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{Z^2+2Z-3}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{X} = \sqrt{Z^2+2Z-3}$$

نعود فنعوض قيمة Z :

$$\Rightarrow \frac{c}{X} = \sqrt{\frac{Y^2}{X^2}+2\frac{Y}{X}-3}$$

والآن نعوض: حيث لدينا:

$$\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{c}{x+1} = \sqrt{\frac{(y-2)^2}{(x+1)^2}+2\frac{(y-2)}{(x+1)}-3}}$$

$$(x+y+1)dx - (2x+2y+2)dy = 0$$

الحل:

نكتب:

$$(x+y+1)dx - 2(x+y+1)dy = 0$$

نقسم الطرفين على المقدار: $(x+y+1) \neq 0$

$$\Rightarrow dx - 2dy = 0 \ \Rightarrow dy = \frac{1}{2}.dx \ \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x + c}$$

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى

تعريف: نقول عن المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى أنها خطية إذا كانت من الشكل:

$$\boldsymbol{y' + p(x).y = q(x)} \qquad \mathbf{(1)}$$

نلاحظ هنا أنه إذا كانت : $\boldsymbol{q(x) = 0}$ فإن $\boldsymbol{y' + p(x).y = 0}$

نسمي المعادلة التفاضلية متجانسة و بدون طرف ثاني.

و المعادلة مع طرف ثاني ندعوها معادلة تفاضلية غير متجانسة.

و لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية بطريقة تحويل الثوابت نتبع الخطوات التالية:

1) نوجد حل العام للمعادلة التفاضلية الخطية دون طرف ثانٍ:

$$y' + p(x).y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x).y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x).dx$$

$$\Rightarrow ln|y| = -\int p(x).dx + ln|c| \Rightarrow ln|y| - ln|c| = -\int p(x).dx$$

$$\Rightarrow ln\left|\frac{y}{c}\right| = -\int p(x).dx \Rightarrow \frac{y}{c} = e^{-\int p(x).dx}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = c.e^{-\int p(x).dx}}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية (دون طرف ثانٍ).

1) نجعل الثابت c تابع ل x فنكتب الحل العام السابق بالشكل:

$$y_1 = c(x).e^{-\int p(x).dx} \ldots (2)$$

ثمَّ نشتق الطرفين بالنسبة لـ x :

$$\ldots(3)\Rightarrow y_1{}' = c'(x).e^{-\int p(x).dx} - c(x).p(x).e^{-\int p(x).dx}$$

والآن نعوض (2) و (3) في المعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ (1):

$$\Rightarrow c'(x).e^{-\int p(x).dx} - c(x).p(x).e^{-\int p(x).dx} + p(x)c(x).e^{-\int p(x).dx} = q(x)$$

ملاحظة : سيتم من خلال حل المعادلة اختصار الحدين والا فان هناك خطأ في الحل

$$\Rightarrow c'(x).e^{-\int p(x).dx} = q(x) \Rightarrow c'(x).\frac{1}{e^{\int p(x).dx}} = q(x)$$

$$\Rightarrow c'(x) = e^{\int p(x).dx}.q(x)$$

نكامل الطرفين:

$$\Rightarrow c(x) = \int q(x).e^{\int p(x).dx}.dx + c_1$$

نعوض قيمة $c(x)$ في العلاقة (2) فنحصل على الحل العام المطلوب:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x).e^{\int p(x).dx}.dx + c_1\right]$$

(حل خاص) $\boldsymbol{y = y_1 + y_2}$

مثال:

$$(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$$

الحل:

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = (1+x^2)\ \ldots\ldots(*)$$

نوجد الحل العام: "نحل دون طرف ثانٍ"

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}y$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)y$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$\ln|y|=\ln|1+x^2|+\ln|c|$$

$$y=c(1+x^2)$$

نوجد الحل الخاص مع طرف ثانٍ بجعل c تابعة لـ x

$$y=c(x).(1+x^2)$$

$$y'=c'(x).(1+x^2)+2x.c(x)$$

نعوض في المعادلة * :

$$c'(x)(1+x^2)+2x.c(x)-\frac{2x}{1+x^2}c(x).(1+x^2)=1+x'$$

$$c'(x)(1+x^2)=1+x^2$$

$$c'(x)=1\ \Rightarrow\ c(x)=x+c_1$$

$$y_1=(x+c_1)(1+x^2)$$

$$Y=y+y_1$$

انتهت المحاضرة

حول حياتك لأهداف . . . . . لا لأشخاص او أشياء

لتعيش حياة سعيدة . . . ☺