نظري

◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: الرابعة عشرة

عنوان المحاضرة: تتمة الحركة المستوية + أمثلة

بداية أصدقائي سنحل بعض الأمثلة ومن ثم سنكمل دراسة الحركة المستوية ..

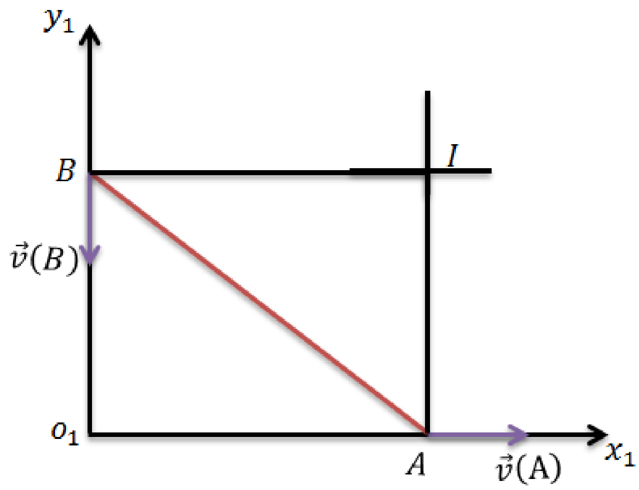
المثال الأول :

-AB مستقيم ينزلق طرفاه على محورين متعامدين بالمستوي $o_1x_1y_1$ عين المركز الآني للدوران .

الحل :

بما أن $\vec{v}(B)$ لاتوازي $\vec{v}(A)$ فنقيم عامود على $\vec{v}(A)$ ونقيم عامود على $\vec{v}(B)$ فيكون المحور الآني I هي نقطة التقاطع للمستقيمين .((وهي الحالة الأولى))

((شرح)) لدينا من النص النقطة A تنزلق على المحور ox ومنه سرعة A محمولة على ox والنقطة B تنزلق على oy وبالتالي سرعة B محمولة على oy وتكون سرعتها عكس اتجاه المحور لأنها تنزلق عكس نحو الاسفل .

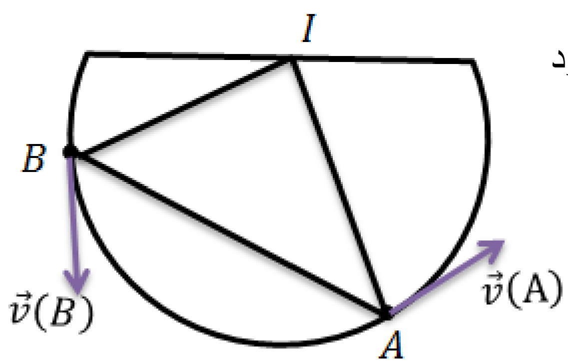


المثال الثاني :

نصف دائرة وقضيب AB يستند عليها بطرفيه عين المركز الآني للدوران .

الحل :

ايضاً هنا $\vec{v}(B)$ لايوازي $\vec{v}(A)$ وبالتالي نقيم عامود على $\vec{v}(A)$ وعامود على $\vec{v}(B)$ والمحور الآني I هو نقطة تقاطع المستقيمين .



والسرعة محمولة على مماس الدائرة والعمود على المماس هو نصف القطر ومنه يكون مركز الدائرة هو نفسه المركز الآني للدوران .

المثال الثالث :

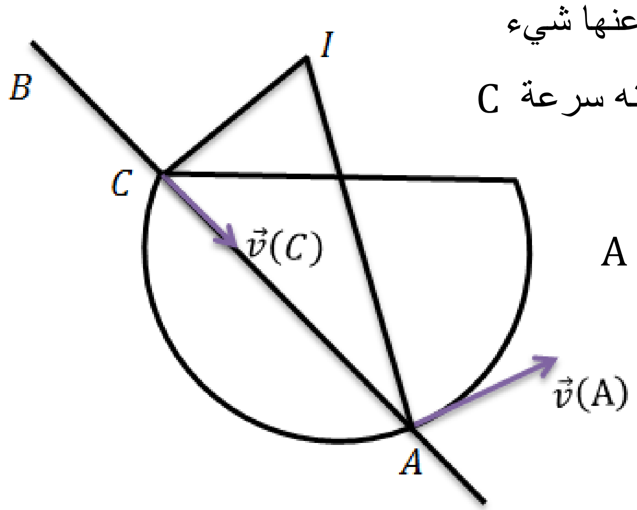
نصف دائرة ثابتة مركزها (o) ونصف قطرها (a)، AB قضيب طوله (2ℓ) تتحرك نهايته (A) على محيط نصف الدائرة ويستند القضيب على الحافة (c) من الدائرة .

الحل :

إن سرعة A هي مماس للدائرة أما سرعة B لا نعلم عنها شيء

لذلك نستفيد من سرعة C وهي نقطة من القضيب ومنه سرعة C متغيرة على القضيب وثابتة بالنسبة لنصف القطر

لتعيين المركز الآني للدوران نرسم عاموداً من سرعة A وعاموداً من سرعة C نقطة تلاقي المستقيمين هي I

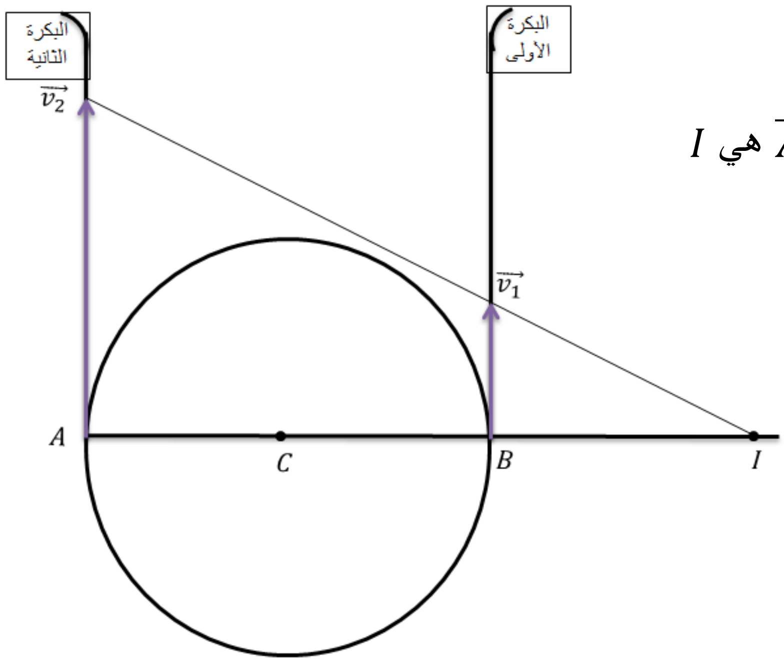


المثال الرابع " سؤال دورة "

بكرة متحركة مركزها (c) نصف قطرها (a) ترفع شاقولياً بواسطة حبل يمر على محيطها وتمر نهايتا الحبل على بكرتين صغيرتين ثابتتين ، (A)، (B) نقطتا تماس الحبل مع البكرة و (AB) هو قطر أفقي فيها فإذا علمت أن سرعة (A) شاقولية نحو الأعلى وتساوي $(\overrightarrow{v_1})$ وسرعة (B) هي $(\overrightarrow{v_2} = 2\overrightarrow{v_1})$ عين المركز الآني للدوران .

الحل :

نلاحظ أن سرعتين غير متساويين و متوازيتين ((الحالة الثانية)) فالتعيين المركز الآني نصل بين نهايات السرع فنقطة التلاقي مع $\overrightarrow{AB}$ هي I



" إيجاد القاعدة والمتدحرج "

إن المركز الآني للدوران هو نقطة من المستوي المتحرك تأخذ في كل لحظة موضعا معينا في هذا المستوي وترسم حين يتغير الزمن منحنيا ما في هذا المستوي نسميه منحني المتدحرج كما أن لها موضعا معينا في المستوي الثابت في كل لحظة فهي ترسم مع تغير الزمن منحنيا ما في المستوي الثابت أيضا نسميه القاعدة

فالمحل الهندسي للمركز الاني للدوران بالمستوي المتحرك **هو المتدحرج**
والمحل الهندسي للمركز الآني للدوران بالمستوي الثابت **هو القاعدة**
من الواضح أن القاعدة والمتدحرج **يشتركان** في كل لحظة بنقطة واحدة فقط **هي المركز الآني للدوران I.**
تكون سرعة هذه النقطة معدومة بالنسبة للمستوي الثابت ، وتسمى حركة المنحني المتدحرج المتماسك مع المستوي المتحرك ، بالنسبة لمنحني القاعدة أو المتماسك مع المستوي الثابت بحركة تدحرج دون انزلاق
أن المركز الآني للدوران I ينتقل على المنحنيين ((المتدحرج والقاعدة)) فله سرعة انتقال على كل مستوي وهذه السرعة ((أي سرعة الانتقال وليست سرعة I)) متساوية سواء كانت الجملة ثابتة أم متحركة
أن المسافة المقطوعة لـ I على القاعدة تساوي المسافة المقطوعة لـ I المتدحرج
كما أن سرع المستقيم المار من I والعمودي على المستوي π معدومة وذلك حسب مبرهنة في بداية بحث الحركة المستوية نجد
((ان سرع اي مستقيم متماسك مع S و يعامد المستوي الأساسي للحركة المستوية))
يسمى هذا المحور بالمحور الآني للدوران ، وهذا المحور ينتقل في الفراغ الثابت مع تغير الزمن موازياً لنفسه بحيث يرسم سطحاً اسطوانياً دليله منحنى القاعدة ، ندعو هذا السطح بسطح القاعدة .
وينتقل ايضاً المحور الآني للدوران في الفراغ المتماسك مع الجسم مع تغير الزمن راسماً سطحاً اسطوانياً دليله منحنى المتدحرج ، ندعو هذا السطح بسطح المتدحرج .
فيشترك سطح المتدحرج مع سطح القاعدة في كل لحظة من الزمن بمستقيم ((المحور الآني للدوران)) سرعة نقاطه معدومة ، ونَصِف الحركة المستوية بناءً على ذلك بأنها حركة جسم صلب يتدحرج على سطح اسطواني متماسك مع الجسم على سطح اسطواني ثابت دون انزلاق
((أي هي حركة تدحرج دون انزلاق))

ملاحظة :

1(لتعيين القاعدة هندسياً نبحث عن نقطة في المستوي الثابت يكون بعدها عن I ثابت .
2(لتعيين المتدحرج هندسياً نبحث عن نقطة في المستوي المتحرك يكون بعدها عن I ثابت .

مثال الأول

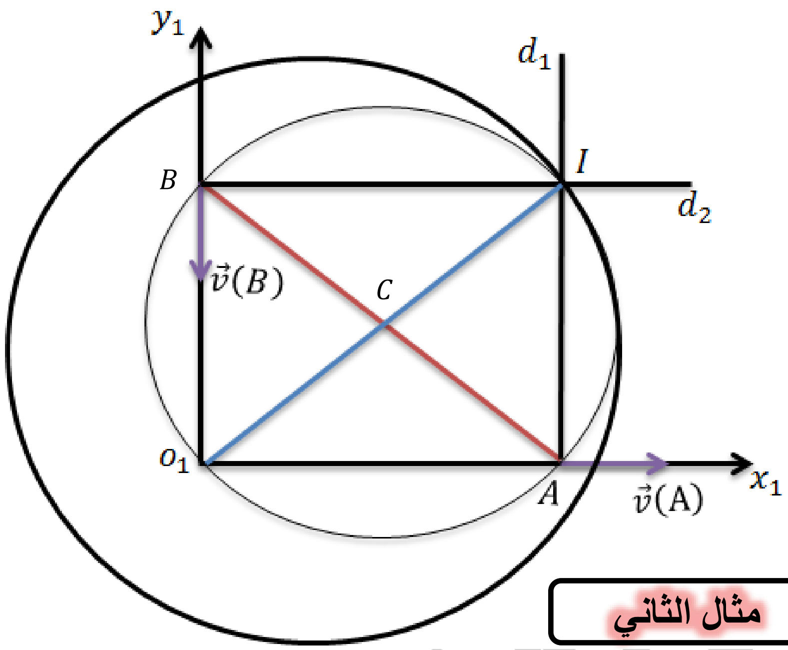
قضيب AB طوله $2l$ ينزلق طرفه A على المحور ox وطرفه B ينزلق على المحور oy عين القاعدة والمتدحرج هندسيا .

الحل:

$\vec{v}(A) \neq \vec{v}\,(B)$ نقوم عمودي على سرعة A ونقيم عمودي على سرعة B نقطة تلاقي العمودين هو المركز الاني للدوران

تعيين القاعدة : نبحث عن نقطة ثابتة بحيث يكون بعدها عن (I) ثابت دوماً في المستوي الثابت إن $AB = o_1I = 2\ell$ لأنها قطر في المستطيل(IBo_1A) ومنه (I) ترسم دائرة بالنسبة للمستوي الثابت مركزها o_1 ونصف قطرها $2l$ أي $c(0,2\ell)$

تعيين المتدحرج : نلاحظ وجود نقطة (c) في منتصف القضيب وبعدها عن I ثابت يساوي l وبالتالي I ترسم بالنسبة للمستوي المتحرك دائرة مركزها هو منتصف القضيب ونصف قطرها l أي $C_1(c,l)$ والحركة هي تدحرج الدائرة الصغيرة داخل الدائرة الكبيرة دون انزلاق .

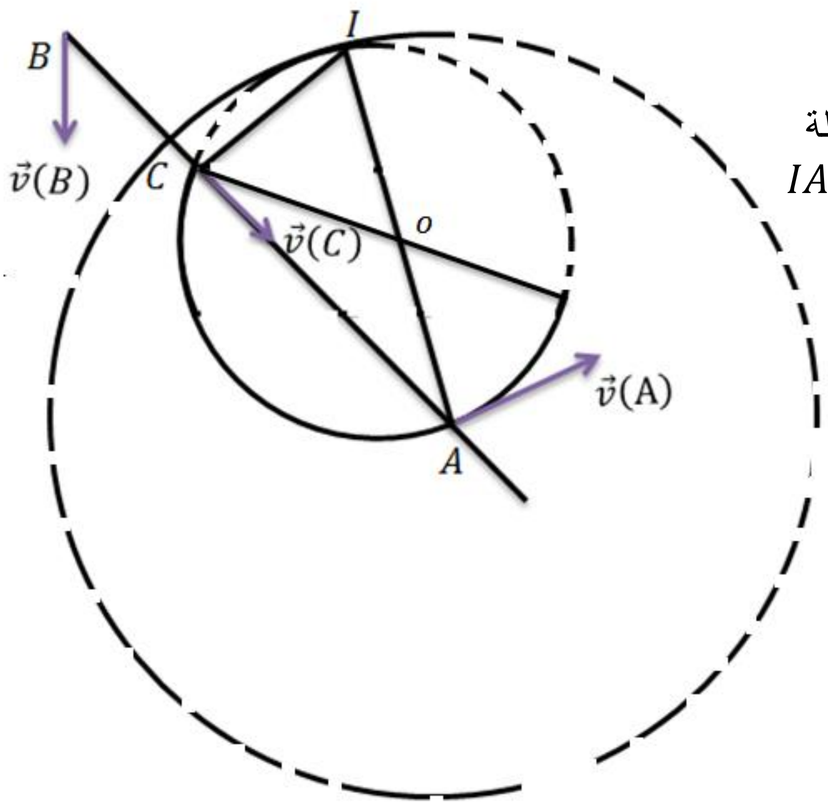


مثال الثاني

قضيب AB ينزلق طرفه A على نصف دائرة قطرها a ويستند طرفه الآخر على الحافة C ولايغادرها عين القاعدة والمتدحرج .

الحل :

تعيين القاعدة : إن المثلث ACI قائم في C وبعد (I) عن (A) ثابت ((نقطة من محيط الدائرة لها بعد ثابت عن المركز)) ومنه فإن I ترسم دائرة كاملة مركزها o هي القاعدة ، ومنه ACI مثلث قائم IA وتر المثلث هو قطر دائرة مركزها o ونصف قطرها $oI = a$ ، فالقاعدة $C(0,a)$.



تعيين المتدحرج : إن بعد النقطة A عن I ثابت ((لأم IA قطر في الدائرة)) إن I ترسم دائرة مركزها A ونصف قطرها $AI = 2a$ فالمتدحرج هو $C(A,2a)$ الحركة هي تدحرج الدائرة الكبيرة

مسألة

يتحرك قرص دائري نصف قطره (a) بحركة لولبية حول محوره بسرعة زاوية ثابتة $(\omega = \omega_0)$ علما بأن محور القرص ينتقل بمقدار $(2\omega_0)$ عندما يتم القرص دورة كاملة حول محوره ، والمطلوب :
تعيين مسار وسرعة نقطة من محيط القرص .

الحل :

هنا لا نملك الخطوة المختزلة لإيجاد المسار ، لكن لدينا من **نص المسألة**
((يتم القرص دورة كاملة حول محوره أي أن $B = 2\pi b$))

$$\Longrightarrow B = 2\pi b = 2\omega_0$$

$$\Longrightarrow \ \omega_0 = \pi b \ \Longrightarrow \mathrm{b} = \frac{\omega_0}{\pi}$$

لحساب زاوية الدوران (θ) نقوم بمكاملة (ω) ومنه :

$$\omega = \theta' \Longrightarrow \ \theta = \int \omega dt \quad ; \omega = \omega_0$$

$$\theta = \int \omega_0 dt \ \ \Longrightarrow \ \theta = \omega_0 t + \theta_0$$

من نص المسألة لدينا شروط البدء ومنه نفرض في بداية الحركة أن $(\theta = 0)$في اللحظة $(t = 0)$
بالتعويض نجد أن : $(\theta_0 = 0)$ ومنه $\theta = \omega_0 t$

تعيين موضع (M)

نختار جملة محاور ثابتة (o_1, x_1, y_1, z_1) بحيث ينطبق محور القرص على محور الدوران $(o_1 z_1)$
ونختار جملة محاور متماسكة (o, x, y, z) بحيث ينطبق محور القرص على محور الدوران (oz)
ونختار (M) واقعة على أحد المحاور وليكن (ox)، وبكتابة العلاقة الشعاعية للنقطة (M) :

$$\forall\ M \in s: \overrightarrow{o_1 M} = b\theta\vec{k} + \overrightarrow{oM}$$

$$\overrightarrow{o_1 M} = b\theta\vec{k} + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \quad \Longrightarrow \ \overrightarrow{o_1 M} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + (b\theta + z)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{o_1 M} = x(cos\theta\vec{\imath_1} + sin\theta\vec{\jmath_1}) + y(-sin\theta\vec{\imath_1} + cos\theta\vec{\jmath_1}) + (b\theta + z)\overrightarrow{k_1}$$

حيث أوجدنا سابقا العلاقات الشعاعية لـ : $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$.
وبالإسقاط على جملة المحاور الثابتة وتعويض $\theta = \omega_0 . t$ نحصل على :

$$x_1 = xcos\omega_0 t - ysin\omega_0 t$$
$$y_1 = xsin\omega_0 t + ycos\omega_0 t$$
$$z_1 = z + b\omega_0 t$$

حيث (x_1, y_1, z_1) مركبات (M)
وبفرض أن $M = (a, 0,0)$ ، وبالتعويض في معادلات حركة النقطة (M) في الجملة الثابتة :

$$x_1 = acos\omega_0 t \ \ ...(*)$$
$$y_1 = asin\omega_0 t \ \ ...(**)$$
$$z_1 = b\omega_0 t \qquad ...(***)$$

لإيجاد **معادلة المسار** نقوم **بحذف الزمن** من العلاقات السابقة :

من $(***)$ نجد : $t = \frac{z_1}{b\omega_0}$

ولدينا $b = \frac{\omega_0}{\pi}$ ومنه :

$$t = \frac{\pi z_1}{\omega_0^2}$$

وبتعويض قيمة (t) في $(*)$ نجد :

$$x_1 = acos\omega_0 \frac{\pi z_1}{\omega_0^2} = acos\frac{\pi z_1}{\omega_0} \quad \dots(1)$$

ونعوض أيضا قيمة (t) في $(**)$ نجد :

$$y_1 = asin\omega_0 \frac{\pi z_1}{\omega_0^2} = asin\frac{\pi z_1}{\omega_0} \quad \dots(2)$$

وبتربيع العلاقتين (2)و(1) وجمعهما نجد :

$$x_1^2 = a^2 \cos^2 \frac{\pi z_1}{\omega_0}$$

$$y_1^2 = a^2 \sin^2 \frac{\pi z_1}{\omega_0}$$

$$\boxed{x_1^2 + y_1^2 = 2a^2 \quad \dots(\#)}$$

أي هي معادلة دائرة في المستوي (x_1, y_1, z_1) ومنه، **معادلة المسار** هي تقاطع $(\#)$ مع (2)أو(1)

لحساب سرعة النقطة (M) :

نشتق موضع النقطة (M) مباشرة

$$\vec{v}(\mathrm{M}) = \begin{cases} x_1' = -a\omega_0 sin\omega_0 t \\ y_1' = a\omega_0 cos\omega_0 t \\ z_1' = b\omega_0 \end{cases}$$

ولحساب التسارع للنقطة (M) :

نشتق معادلات السرعة مباشرة

$$\vec{\Gamma}(\mathrm{M}) = \begin{cases} x_1'' = -a\omega_0^2 \cos\omega_0 t \\ y_1'' = -a\omega_0^2 \sin\omega_0 t \\ z_1'' = 0 \end{cases}$$

المسألة الثانية محلولة في المحاضرة العاشرة الصفحة 5 ^_^