معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثالثة

التحليل العقدي1

المحاضرة15

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل:

هاتف – واتساب: 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 3rd year

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة: الخامسة عشر ◄ عنوان المحاضرة: المتسلسلات

تمرين : ادرس تقارب المتتالية :

$$z_n = \frac{(-1)^n}{n} + i\frac{n}{2n+1}$$

الحل :

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n}, \qquad |x_n| = \frac{1}{n} \to 0 \implies x_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$$

$$y_n = \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}$$

اذا المتتالية z_nمتقاربة ونهايتها :

$$\lim z_n = \lim x_n + \lim y_n$$

مثال لمتتالية لها عدد غير منتهي من نقاط التجمع :

$$1 ,1,2,1,2,3,1,1,3,4, \dots ,1,2,3, \dots ,4$$

مجموعة نقاط تجمع هذه المتتالية هي $N \cup \{\infty\}$

النهاية العليا والنهاية الدنيا لمتتالية حقيقية

لتكن $\{x_n\}$ متتالية حقيقية ولنعرف المتتالية $\{a_n\}$ من $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$a_1 = \text{Sup}\{x_0, x_1, ..\}$$

$$a_2 = \text{Sup}\{x_1, x_2, ..\}$$

$$a_n = \text{Sup}\{x_n, x_{n+1}, ..\}$$

إن المتتالية $\{x_n\}$ متتالية في $\overline{\mathbb{R}}$ ((لأنه قد يكون الـ Sup هو ∞)) حيث $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup [-\infty, \infty]$ و من الواضح أن $a_{n+1} \leq a_n \Leftarrow \{a_n\}$ متناقصة ((ليس بالضرورة تماماً)) ، بالتالي فلها نهاية في $\overline{\mathbb{R}}$ نسميها النهاية العليا للمتتالية $\{x_n\}$ ونرمز لها :

$$\lim Sup\, x_n \quad \text{أو} \quad \overline{\lim}\, x_n$$

أي أن $\overline{\lim}\, x_n = \lim a_n$

*و بالمثل لنعرف المتتالية $\{b_n\}$ كما يلي :

$$b_0 = \inf\{x_0, x_1, ..\}$$

$$b_1 = \inf\{x_1, x_2, ..\}$$

$$\vdots$$

$$b_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, ..\}$$

هذه المتتالية في $\overline{\mathbb{R}}$ و هي متزايدة في $\overline{\mathbb{R}}$ فلها نهاية في $\overline{\mathbb{R}}$ نسميها النهاية الدنيا لـِ $\{x_n\}$ ونرمز لها ب

$$\lim inf\, x_n \quad \text{أو} \quad \underline{\lim} x_n$$

أي أن $\underline{\lim} x_n = \lim b_n$

مثال(1) : لنأخذ $\{x_n\}$ والتي حدودها ... ... $1, -2\, , 3, -4{,}5, -6,$.

$$x_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, ...\} = \infty$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\lim}\, x_n = \infty$$

$$b_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, ..., ...\} = -\infty$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\lim}\, x_n = -\infty$$

مثال(2) : المتتالية $\{(-1)^n\}$ متتالية حقيقية متباعدة (لأنها متناوبة)

$$a_n = \sup\{-1\, , 1\} \to 1$$

$$\overline{\lim}\quad (-1)^n = 1$$

$$b_n = \inf\{-1\,,1\} = -1$$

$$,\qquad \underline{lim}(-1)^n = -1$$

خواص النهاية العليا و النهاية الدنيا :

لتكن $\{x_n\}$ متتالية حقيقية عندئذٍ :

1-النهاية العليا ل $\{x_n\}$ هي x_n هي أكبر نقطة تجمع للمتتالية $\{x_n\}$ في $\overline{\mathbb{R}}$

2- النهاية الدنيا ل $\{x_n\}$ هي x_n هي أصغر نقطة تجمع للمتتالية $\{x_n\}$ في$\overline{\mathbb{R}}$

3-إذا كانت المتتالية متباعدة أي غير موجودة (ليس لها نهاية) فإن النهاية الدنيا ل x_nأصغر من النهاية العليا ل x_n

$$\underline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x_n$$

4-تكون $\{x_n\}$متقاربة اذا وفقط اذا تحقق :

$$\underline{\lim}\, x_n = \lim x_n = \overline{\lim}\quad x_n$$

المتسلسلات العقدية

المتسلسلة العقدية هي ثنائية (a_n, s_n)من المتتاليات العقدية نرمز لها بالشكل :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

بحيث تحقق هذه الثنائية مايلي :

$$s_0 = a_0 \quad ,s_1 = a_0 + a_1 \ , \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = s_1 + a_2$$

وبالتالي يصبح الشكل: $s_n = s_{n-1} + a_n$

ويمكن أن نكتب: $a_n = s_n - s_{n-1}$

نسمي a_nبالحد العام لهذه المتسلسلة ، كما نسمي المتتالية ب متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة

تقارب متسلسلة عقدية

نقول عن المتسلسلة عقدية z_n أنها متقاربة وأن مجموعها يساوي S إذا وفقط إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية لها s_n متقاربة من S وفي حال التقارب نكتب $\sum_{n=n_0}^{\infty} z_n = S$

معيار الحد العام

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} z_n \text{ متقاربة } \underset{\text{فإن}}{\Longleftarrow} 0 \longrightarrow z_n$$

الأثبات :

لنفرض أن s مجموع المتتالية $\sum_{n=n_0}^{\infty} z_n$ المتقاربة

عندئذ : $S_n = S_{n-1} + z_n$

$$S_n - S_{n-1} = z_n$$

بأخذ نهاية الطرفين $0 = S - S = \lim 3_n$

◄ملاحظة :

1- الشرط أن يسعى الحد العام للمتسلسلة إلى الصفر هو شرط لازم وغير كافي لتقارب تلك المتسلسلة .

2- إذا لم يسعى الحد العام لمتسلسلة عقدية إلى الصفر فهذه المتسلسلة تكون متباعدة

إذا كان $z_n \nrightarrow 0$ فإن $\sum_{n=n_0}^{\infty} z_n$ متباعدة

مثال :

- $\sum_{n=0}^{\infty} i^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} i^n$ هندسية أساسها i

متباعدة لأن $i^n \nrightarrow 0$

فالمتسلسلة متباعدة لأن متتالية الحد العام ليس لها نهاية

-1

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})i$$

$$|a_n| = \left|\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)i\right| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\lim|a_n| = lim\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

وبالتالي لن نستفيد من معيار الحد العام
وحسب التعريف نوجد متتالية المجاميع الجزئية لاثبات أنها متباعدة

$$S_n = \left[(0-\cancel{1}) + (\cancel{1}-\cancel{\sqrt{2}}) + (\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{3}}) + \cdots + (\cancel{\sqrt{n}}-\sqrt{n+1})\right]i$$

$$|S_n| = -\sqrt{n+1} \longrightarrow +\infty$$

المتسلسلة متباعدة $\Leftarrow$ متباعدة $S_n \Leftarrow S_n \to \infty \Leftarrow$

المتسلسلة الهندسية العقدية

هي متسلسلة عقدية حدها العام متتالية من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty}(ba^n)$

a أساس المتسلسلة و b حدها الأول لدراسة تقاربها **نميز حالتين**

1- $|a| \geq 1$

$$|z_n| = |ba^n| = |b||a^n| = |b| \longrightarrow |b| \neq 0$$

ومنه $z_n \nrightarrow 0$ وهي متباعدة (حسب اختبار الحد العام)

2- $|a| < 1$

$$S_n = b + ba + \cdots + ba^n + \cdots \quad (1)$$

$$aS_n = ab + \cdots + ba^n + ba^{n+1} + \cdots \quad (2)$$

بطرح (2) من (1)

$$(1-a)S_n = b - ba^{n+1} \qquad : a \neq 1$$

$$\longrightarrow S_n = \frac{b}{1-a}(1-a^{n+1})$$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{و المتسلسلة متقاربة}} \quad S_n \longrightarrow \frac{b}{1-a}$$

المتسلسلة متقاربة $\sum_{n=0}^{\infty} ba^n = \frac{b}{1-a}$

أمثلة :

- $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ هندسية أساسها

$1+i\sqrt{3}$ و إن : $\left|1+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{4}=2>1$

فالمتسلسلة متباعدة

ملاحظة : نعلم أن اذا كان المتسلسلة $\sum a^n$ حيث $a<1$ تكون المتسلسلة متقاربة

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right)^{\wedge}n$$

2- هندسية أساسها

$$a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$|a|=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$$

اذا المتسلسلة متقاربة ومجموعها $s=\frac{b}{1-a}$

$$s=\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{i1}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{2}+\frac{i1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+i\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}-\frac{i1}{2}}=\frac{i}{1-i}$$

ولكتابته بالشكل الجبري : نضرب بمرافق المقام

$$\frac{i(1+i)}{1+i}=\frac{-1+i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{i1}{2}$$

مبرهنة:

لتكن $\sum z_n$ ، $\sum W_n$ متسلسلتان عقديتان ، ولنفرض وجود عدد $N_0>max(n_0,n_1)$ بحيث يحقق المساواة : $z_n=W_n\ \ ;\ \forall n>N_0$

عندئذٍ للمتسلسلتين $\sum z_n$ ، $\sum W_n$ الطبيعة ذاتها ((متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً))

أي أن اختلاف متسلسلتين بعدد منته من الحدود لا يؤثر على طبيعتها .

لنفرض أن $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$

$\{\sigma_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum_{n=0}^{\infty} W_n$

عندئذ $\forall n\in N_0$

$$S_n - \sigma_n = \underbrace{(z_0 + z_1 + \cdots + z_n) - (w_0 + W_1 + \cdots + W_n)}_{\text{عدد ثابت}=A} \ldots\ldots.*$$

$$\sum z_n \text{ متقاربة } \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ متقاربة } \underbrace{\Leftrightarrow}_{*\text{حسب}} \{\sigma_n\}\text{متقاربة } \Leftrightarrow \sum W_n \text{ متقاربة}$$

- لاحظ أن:

$\sigma_n = S_n - A$. $\Leftarrow$ $S_n = A + \sigma_n$.

- إن مجموع متسلسلتين متقاربتين هو متسلسلة متقاربة.

إن تقارب $\sum z_n \Leftrightarrow$ تقارب $s_n \Leftrightarrow$ تقارب $\sigma_n \Leftrightarrow \sum W_n$ متقاربة.

نتيجة :

إضافة أو حذف عدد منته من حدود المتسلسلة لا يؤثر على طبيعتها لكنه يؤثر على مجموعها

انتهت المحاضرة

إعداد: رشا القرصة و تقى إسماعيل و خديجة الرفاعي