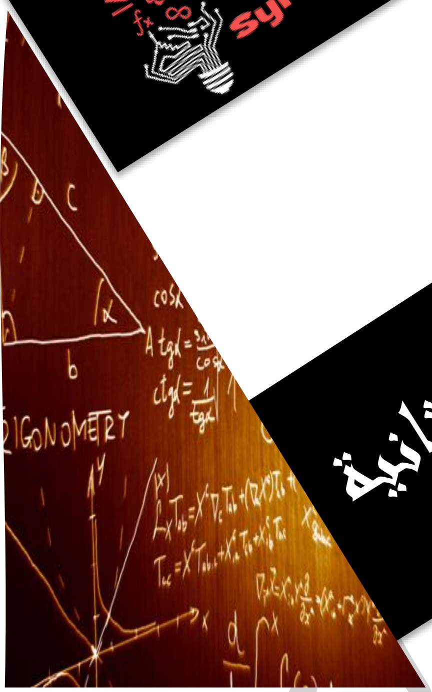
معك نحو

التخرج

Syria Math Team



السنة الثانية

البنى الجبرية1

المحاضرة 7

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2nd year

نظري

◄ دكتور المادة: فادي أبو حرب

◄ المحاضرة: السابعة ◄ عنوان المحاضرة: قدرة مجموعة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

قدرة مجموعة ومبرهنات.

تعريف: لتكن A, B مجموعتين اختياريتين، نقول ان قدرة المجموعة A تساوي قدرة المجموعة B اذا وجد تقابل بين المجموعتين A, B ونقول في هذه الحالة ان المجموعتين متكافئتين ونرمز لذلك بالرمز $\sim$ أي ان:

$$A \sim B \Leftrightarrow card\ A = card\ B \Leftrightarrow \exists f: A \longrightarrow B$$

- ينتج من هذا التعريف مباشرة انه اذا كانت المجموعتان A, B منتهيتين فإن $A \sim B$ عندما وفقط عندما كانت كلتا المجموعتين تملكان العدد ذاته من العناصر وهذا يبين لنا ان قدرة المجموعة المنتهية هو مفهوم يعبر عن كمية العناصر التي تتألف فيها المجموعة.
- اما قدرة المجموعة غير المنتهية فهو تعميم لمفهوم كمية العناصر التي تتألف منها المجموعة.

(اثبات ان $\boldsymbol{B, A}$ غير متكافئتين في المحاضرات القادمة).

مبرهنة : وظيفة

لتكن $\sum = \{A_i : i \in I\}$ اسرة من المجموعات ان العلاقة $\sim$ على المجموعة $\sum$ هي علاقة تكافؤ، وصفوف تكافؤ هذه العلاقة هي المجموعات متساوية القدرة.

تمرين: اثبت ان $card\ N^* = card\ Z$

الاثبات:

حسب التعريف لنثبت وجود تطبيق تقابل (غامر ومتباين) بين N^* و Z

لنعرف العلاقة: $f: Z \longrightarrow N^*$ بالشكل

$$f(n) = \begin{cases} 2n+1 & ; n \geq 0 \\ 2|n| & ; n < 0 \end{cases} \qquad n \in Z$$

f تطبيق لان: $\forall x,y \in Z$ نميز حالتين:

الحالة الأولى: $x = y$

$$2x+1 = 2y+1 \qquad x,y \geq 0$$

$$f(x) = f(y)$$

الحالة الثانية: $x = y$

$$-x = -y$$

$$2|x| = 2|y|$$

$$f(x) = f(y)$$

ومنه f تطبيق.

والان لنثبت انه متباين: $\forall x,y \in Z; f(x) = f(y)$

f متباين لان في حالة

$$f(x) = f(y)$$

$$2x+1 = 2y+1 \qquad x,y \geq 0$$

$$2x = 2y$$

$$x = y$$

في حالة $x,y < 0$

$$f(x) = f(y)$$

$$2|x| = 2|y|$$

$$x = y$$

ومنه f متباين

في حالة $x \geq 0$ و $y < 0$

$$f(x) = f(y)$$

$$2x+1 = 2|y|$$

$$2x + 1 = -2y$$

$$2x + 2y = -1$$

$$x + y = -\frac{1}{2}$$

ولكن $x, y \in Z$ ومنه هذا غير ممكن. مما سبق نجد ان f متباين.

اثبات انه غامر:

لنثبت انه أياً كان $x \in N^*$ فإنه يوجد $z \in \mathbb{Z}$ بحيث $f(z) = x$

نميز حالتين:

- اذا كان x فردي عندئذٍ: $x - 1$ زوجي ومنه $x - 1/2 \in Z$ و $f\frac{x-1}{2} = 2\,\frac{x-1}{2} + 1 = x$
- اذا كان x زوجي عندئذٍ: $x \in Z$ و $\frac{-x}{2} \in Z$ ومنه $f\left(\frac{-x}{2}\right) = 2\left|\frac{-x}{2}\right| = x$

ومنه f غامر.

مما سبق نجد ان f تقابل وبالتالي حسب التعريف $card\ N^* = card\ Z$

وظيفة: **اثبت ان قدرتا أي مجالين مغلقين من $\mathbb{R}$ متساويين أي ليكون $a, b, c, d \in R$ بحيث $a \neq b$ و $c \neq d$ عندئذٍ:**

$$card[a, b] = card[c, d]$$

مساعدة: $f: [a, b] \longrightarrow [c, d]$

$$\forall x \in [a, b]; f(x) = \frac{x - a}{b - a}[d - c] + c$$

تعريف: نقول ان قدرة المجموعة A اصغر او تساوي قدرة المجموعة B اذا وجد تطبيق متباين من A الى B

بمعنى اخر : $card\ A \leq card\ B \Leftrightarrow \exists f: A \longrightarrow B$

من خلال التعريف يمكننا صياغة شرط اخر لتساوي قدرتي مجموعتين او ذلك من خلال المبرهنة الاتية.

مبرهنة: (كانتور- برنشتاين):

لتكن A, B مجموعتين اختياريتين اذا وجد تطبيق متباين من B الىA وتطبيق متباين اخر من A الىB

عندئذٍ: $A \sim B \Leftrightarrow card\ A = card\ B$

انتهت المحاضرة

اعداد: وئام النمر☺ ولاء الأخضر ☺ أبرار الخالد