معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثانية

البنى الجبرية1

المحاضرة11

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2nd year

نظري

◄ دكتور المادة: فادي أبو حرب

◄ المحاضرة : الحادية عشر ◄ عنوان المحاضرة: نظرية الزمر

أفكار الفصل الخاص بنظرية الزمر:

1- الزمرة الجزئية.
2- زمرتا الجمع والضرب بالمقاس n.
3- الزمرة الدوارة.
4- الزمرة الجزئية الناظمية وزمرة الخارج.
5- التشاكلات الزمرية.
6- الجداء والمجموع المباشر للزمر.
7- ال $p-$ زمرة.
8- الزمرة البسيطة.

تعريف الزمرة الجزئية:

لتكن G زمرة والمجموعة H جزئية وغير خالية من G، نقول عن H انها زمرة جزئية من G اذا كانت H زمرة بالنسبة الى العملية المعرفة على G

ينتج من التعريف مباشرة ان كلاً من G و $\{e\}$ زمرة جزئية من G

مبرهنة:

لتكن G زمرة و H مجموعة جزئية وغير خالية من G الشروط التالية متكافئة:

1- H زمرة جزئية من G
2- اياً كان $a, b \in H$ فإن $a.b \in H$
اياً كان $c \in H$ فإن $c^{-1} \in H$
3- اياً كان $a, b \in H$ فإن $a.b^{-1} \in H$

البرهان:

$1 \Leftarrow 2$ ينتج مباشرة من تعريف الزمرة (كون H حسب التعريف هي زمرة)

$3 \Leftarrow 2$ $\forall a, b \in H \, , a.b^{-1}H$

$$\forall a,b \in H\ , a \in H$$

$$b \in H \Longrightarrow b^{-1} \in H$$

$$\Longrightarrow a.b^{-1} \in H$$

$3 \Longleftarrow 1$ التجميعي يجب اثبات ان : $\forall a,b,c \in H\ , a(b.c) = (a.b).c$

بما ان $H \in G$ فإن $\forall a,b,c \in H\ \subseteq G \ \Longrightarrow a(b.c) = (a.b),c$

الحيادي: لدينا فرضاً $\forall a,b\ \in H\ ; a.b^{-1} \in H$

H غير خالية يوجد $x \in H$ لدينا حسب (3)

$$\forall a,b \in H\ , a.b^{-1} \in H\ ,\quad x = a\quad ,\qquad x = b$$

$: x = a,\quad x^{-1} = b^{-1}$ $\qquad e = x.x^{-1} = a.b^{-1} \in H$

$$e \in H$$

المقلوب : $\forall y \in H\ ; y^{-1} \in H$

لدينا الفرض : $\forall a,b \in H\quad ,\quad a.b^{-1} \in H$

$$y^{-1} = e.y^{-1} = a.b^{-1} \in H$$

$$a = e.y = b$$

قانون التشكيل: $\forall x,y \in H\ \ ; x.y \in H$

$$a.b^{-1} \in H$$

$$x.y = a.b^{-1} \in H$$

من تحقق ماسبق نجد ان H زمرة جزئية من G

أمثلة:

1) لتكن G زمرة تبديلية ان المجموعة:

$$H = \{x : x \in G : x^2 = e\}$$

زمرة جزئية من G

بما ان $e^2 = e$ عندئذٍ $e \in H$ وبالتالي المجموعة H غير خالية. ليكن $x,y \in H$ عندئذٍ:

$$(xy^{-1})^2 = (xy^{-1})(xy^{-1}) = x^2(y^2)^{-1} = ee^{-1} = e$$

وبالتالي $xy^{-1} \in H$ وحسب المبرهنة السابقة نجد ان المجموعة H هي زمرة جزئية من G

2) ليكن $n \geq 1$ عدد صحيح عندئذٍ المجموعة:

$$nZ = \{nm\,; m \in Z\}$$

زمرة جزئية من زمرة الاعداد الصحيحة $(Z, +)$

$$3Z = \{0, \pm 3, \pm 6, \dots\}$$

$$7Z = \{0, \pm 7, \pm 14, \dots\}$$

مبرهنة:

لتكن G زمرة و H مجموعة جزئية منتهية من G الشرط اللازم والكافي كي تكون H زمرة جزئية من G هو ان يتحقق:

$$\forall a, b \in H\,;\ a.b \in H$$

البرهان:

لزوم الشرط H زمرة جزئية من G ونريد اثبات ان

$$\forall a, b \in H, a.b \in H$$

واضح حسب رقم 2 من المبرهنة السابقة.

كفاية الشرط:

$$\forall a, b \in H \implies a.b \in H$$

ونريد اثبات ان H زمرة جزئية من G . يكفي لاثبات ذلك حسب مبرهنة سابقة ان نثبت انه اياً كان $a \in H$ فإن $a^{-1} \in H$

لتكن $a \in H$ نميز حالتين:

الحالة الأولى: $a = e$ عندئذٍ: $a^{-1} = a \in H$

الحالة الثانية : $a \neq e$ لدينا حسب الفرض $\forall a, b \in H\,; a.b \in H$

ومنه: $a^2 = a.a \in H$

$$a^3 = a.a^2 \in H$$

$$a^4 = a.a^3 \in H$$

ولتكن H منتهية ومنه يوجد $i,j \in N^*$ بحيث $i \neq j$ وان $a^i = a^j$

لنفرض ان : $i > j$ $a^{i-j} = e$

$i - j > 0$ بما ان فرضنا ان $e \neq a$

$$a^{i-j} = e \neq a$$

أي سيصبح $i - j > 1$

$$i - j - 1 > 0$$

وبالتالي $a^{i-j-1} \in H$ (1)

من جهة أخرى لدينا $a^i = a^j$

$$a^{i-j} = e$$

$$a.a^{i-j}.a^{-1} = e$$

$$a.a^{i-j-1} = e$$

$a^{i-j-1} = a^{-1}$ (2)

من 1 و2 نجد $a^{-1} = a^{i-j-1} \in H$

أي $a^{-1} \in H$

وبالتالي نجد مما سبق ان H زمرة جزئية من G

تمهيدية:

لتكن G زمرة و $a \in G$ وليكن $n,m \in Z$ عندئذٍ:

$e^n = e$ (1

$a^n.a^m = a^{n.m}$ (2

$(a^n)^m = a^{n.m}$ (3

انتهت المحاضرة