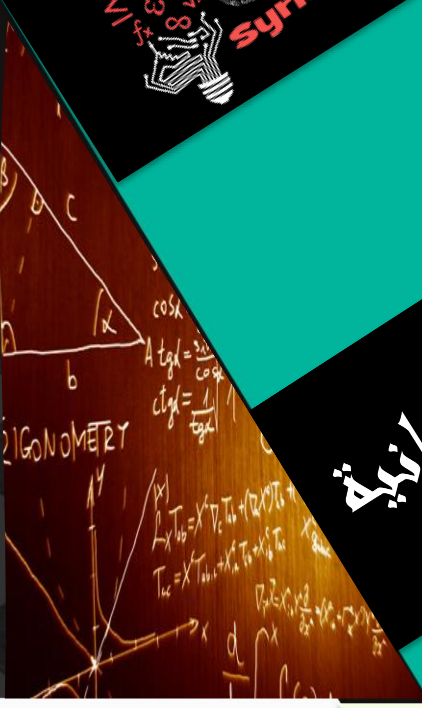
معك نحو

التخرج

Syria Math Team



التحليل3(عملي)

السنة الثانية

المحاضرة3

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة : الخامسة

◄ عنوان المحاضرة: المتتالية المتقاربة بانتظام

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- مبرهنتان
2- نتائج
3- مثال

مثال:

أوجد منطقة تقارب المتسلسلة وادرس تقاربها $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ المعرفة على $\mathbb{R}$

نأخذ متتالية مجاميعها الجزئية ثم نرى مجال التقارب.

$$s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n - x^{n+1}$$

من أجل $n = 1$ تعطينا $x - x^2$

من أجل $n = 2$ تعطينا $x^2 - x^3$

من أجل $n = n - 1$ تعطينا $x^{n-1} - x^n$

أي:

$$s_n(x) = (x - x^2) + (x^2 - x^3) + \cdots + (x^{n-1} - x^n) + (x^n - x^{n+1})$$

$$\Rightarrow s_n(x) = x - x^{n+1}$$

والآن نأخذ نهاية متتالية المجاميع الجزئية:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} (x - x^{n+1}) = x - \lim_{n\to\infty} x^{n+1}$$

$$= \begin{cases} 0 & ; \quad x = 1 \\ 0 & ; \quad x = 0 \\ x & ; \quad |x| < 1 \\ -\infty & ; \quad x > 1 \\ \text{غير موجود} & ; \quad x \leq -1 \end{cases}$$

منطقة تقارب هذه المتسلسلة هي $|x| < 1$ و $x = 1$ أو $]-1,1]$

تابع المجموع هو:

$$s(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x = 1 \\ x & ; \quad |x| < 1 \end{cases}$$

تابع غير مستمر لأنه يعاني من انقطاع عند النقطة $x = 1$ على هذا المجال وبالتالي المتسلسلة متقاربة نقطياً على المجال $]-1,1]$ من $s(x)$

تعريف: يقال عن متسلسلة توابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ المعرفة على I أنها متقاربة نقطياً على المجال I إذا كانت هذه المتسلسلة متقاربة كمتسلسلة عددية من أجل

كل نقطة x من I.

مثال2 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x-1}}$$

نلاحظ أن هذه المتسلسلة ريمانية و تكون متقاربة عندما $x - 1 > 1$ أي $x > 2$

و هي متباعدة خلاف ذلك . فإذن منطقة التقارب $D = [2, \infty[$

مثال3 : هل المتسلسلة متقاربة بانتظام أم ليس بانتظام على المجال المذكور :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2nx}{e^{n^2 x^2}} \quad : I = [0,1]$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2nx}{e^{n^2}x^2} = 0$$

(نهاية شهيرة)

و أن :

$$\lim sup|f_n(x) - f(x)| = limsup\left|\frac{2nx}{e^{n^2}x^2}\right| = \sqrt{\frac{2}{e}} \neq 0$$

فالتقارب غير منتظم.

مثال 4: أوجد منطقة تقارب المتسلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$$

نلاحظ أن هذه المتسلسلة هندسية و أساسها $r = \frac{x-1}{x+1}$ و هي تتقارب عندما :

$$|r| = \left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1$$

أي :

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1$$

* نميز حالتين :

1- إذا كان $x + 1 > 0$: نضرب أطراف المتراجحة بـ $x + 1$

$$-x - 1 < x - 1 < x + 1$$

و بالتالي لدينا المتراجحتين :

$$-x - 1 < x - 1 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow \boxed{x > 0}$$

$x - 1 < x + 1 \Rightarrow -1 < +1$ محقق

-2 إذا كان $x+1<0$: نحصل على المتراجحتين:

$$x-1>x+1 \Longrightarrow -1>1 \text{ مستحيلة}$$

بالتالي مستحيلة

فالمجال النهائي :

$$D=]0,\infty[$$

مثال5:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^{2n}(3x+2)^{2n-1}$$

نطبق دالمبير :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^{2n+2}\,(3x+2)^{2n+1}}{4^{2n}(3x+2)^{2n-1}}\right| = 4^2(3x+2)^2$$

و حتى تتقارب المتسلسلة حسب دالمبير يجب أن يكون :

$$4^2(3x+2)^2<1$$

و بالتالي :

$$-1<4(3x+2)<1$$

$$-\frac{1}{4}<3x+2<\frac{1}{4}$$

$$-\frac{3}{4}<x<-\frac{7}{12}$$

و منه مجال التقارب هو $\left]-\frac{3}{4},-\frac{7}{12}\right[$

في حالة $4^2(3x+2)^2=1$ حالة شك ندرسها :

$$x=-\frac{3}{4} \Longrightarrow \sum(-4) \text{ متباعدة}$$

$$x = -\frac{7}{12} \quad \Rightarrow \sum(4)$$ متباعدة

مثال6:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}} \quad : R^*$$

حسب اختبار دالمبير :

$$D = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(2n-1)x^{2n-1}}{(2n+1)x^{2n+1}}\right| = \lim\left(\frac{2n-1}{2n+1}\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$$

شرط التقارب :

$$\frac{1}{x^2} < 1$$

$$x^2 > 1$$

و بالتالي :

$$|x| > 1$$

فمجال التقارب :

$$]-\infty, -1[\ \cup\ ]1, +\infty[$$

أما حالات الشك عندما $x = \pm 1$ نحصل على المتسلسلتين المتباعدتين :

$$\sum \frac{1}{2n-1} \quad \& \quad \sum -\frac{1}{2n-1}$$

مثال 7: أوجد منطقة التقارب و أوجد مجموع المتسلسلة :

$$\sum \frac{x^n}{2^n}$$

هي متسلسلة هندسية أساسها $r = \frac{x}{2}$ و شرط التقارب :

$$-1 < \frac{x}{2} < 1$$

أي

$$-2 < x < 2$$

فمنطقة التقارب $]-2,2[$

لندرس حالات الشك : عندما $x = \pm 2$ نحصل على المتسلسلتين المتباعدتين :

$$\sum 1 \quad , \quad \sum (-1)^n$$

تذكر: كل متسلسلة حدها العام ثابت هي متباعدة .

انتهت المحاضرة

إعداد: رنا شورية *علا الدالاتي *نذير تيناوي