معك نحو

السخر

Syria Math Team

السنة الثالثة

التحليل التابعي 1

المحاضرة 11

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل:

هاتف – واتساب: 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 3rd year

نظري

◄ دكتور المادة: جمال الملي

◄ المحاضرة : الحادية عشر ◄ عنوان المحاضرة : الفضاءات المنظمة

الفصل الثاني :

من الممكن الحصول على فضاءات مترية مفيدة وذات أهمية خاصة اذا أخذنا الفضاء المتجهي وعرفنا عليها مترك فإننا نحصل على الفضاء المنظم ، واذا كان هذا الفضاء فضاء منظم تام بخصوص المترك المعرف عليه والمولد من هذا النظيم يدعى فضاء باناخ .

الفضاء المتجهي :

هو مجموعة X غير خالية من العناصر x, yوتدعى متجهات ، وهذه المجموعة مزودة بعمليتين جبريتين تدعى هاتين العمليتان (عملية داخلية وعملية خارجية) .

جمع متجهات ، وضرب متجهات أعداد :

حيث عملية الجمع (+) تحقق:

$$1- \forall x, y \in X : x + y \in X$$

$$2- \forall x, y, z \in X : x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$3- \forall x, y \in X : x + y = y + x$$

$$4- \forall x \in X : x + 0 = 0 + x = x$$

$$5- \forall x \in X ; \exists(-x) \in X : x + (-x) = 0$$

عملية الضرب :

ليكن الحقل kمجموعة مؤثرات هذا الفضاء فإن عملية الضرب هذه يجب أن تحقق الخواص التالية :

$$\forall a \in k , x \in X : a.x \in X$$

Syria Math Team

$$\forall\, a,b\ \in k\ , x \in X : (a.b).x = a.(b.x)$$

$$\forall\, a \in k\ ; x,y \in X : a(x+y) = ax + ay$$

$$\forall\, a,b\ \in k; x \in X\ ; (a+b)x = ax + bx$$

$$1_k\ \in k\ ; x \in X : 1_k\ .x = x$$

إذا كان $K = R$ يدعى X فضاء متجهي حقيقي .

إذا كان $K = \mathbb{C}$ يدعى X فضاء متجهي عقدي .

وتعرف التراكيب الخطية :

للمتجهات: $x_1, x_2, \dots\dots, x_n$ من الفضاء المتجهي X هي عبارة عن الشكل

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots\dots + a_nx_n$ حيث $a_1, a_2, \dots\dots a_n$ معاملات

تعريف دالة النظيم والفضاء المنظم :

ليكن لدينا X فضاء متجهي ولنعرف عليه الدالة التالية بالشكل : $||.||: X \to R$

$$x \to ||X||$$

فإنه $\forall\, x,y\ \in X$ إذا تحققت هذه الدالة الشروط التالية :

$$1 - ||x|| \geq 0$$

$$2 - ||x|| = 0_R \Leftrightarrow x = 0_R$$

$$3 - ||\alpha x|| = |\alpha|||x|| \ ;\ \alpha \in K$$

$$4 - ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

عندها نقول أن الدالة $||.||$ هي دالة نظيم ويدعى الفضاء المتجهي المزود بهذه الدالة بالفضاء المنظم $x = (x\ , ||.||)$

Syria Math Team

ملاحظات هامة :

لابد من التأكيد على أنه لا يمكن تعريف دالة النظيم إلا على فضاء متجهي (شعاعي) وإن جميع الفضاءات التي درسناها سابقا $[\ell^p\ , \ell^\infty, c[a,b], \ldots..]$ هي فضاءات شعاعية يمكن تعريف النظيم عليها .

كل فضاء منظم هو فضاء متري لكن العكس غير صحيح بالضرورة ((كل نظيم يولد مترك ولكن ليس كل مترك يولد نظيم)) أي أن $d(x,y) = ||x-y||$ يسمى هذا المترك المولد بالنظيم .

أمثلة عن الفضاء المتجهي :

الفضاء الأقليدي R^n هو مجموعة كل المركبات من الأعداد الحقيقية ، وهذه المجموعة مزودة بالعمليتين الجبريتين المعرفتين بالطريقة المألوفة

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots., \xi_n)$$

$$y = (\eta_1, \eta_2, \ldots., \eta_n)$$

$$x + y = \{\xi_1 + \eta_1\ , \xi_2 + \eta_2\ , \ldots, \xi_n + \eta_n\ \}$$

$$\alpha x = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \ldots., \alpha\xi_n)$$

وهذا الفضاء هو فضاء خطي حقيقي وهو فضاء متجهي.

الفضاء $c[a,b]$ فضاء الدوال المستمر :

ان كل نقطة من هذا الفضاء هي دالة حقيقية مستمرة على $c[a,b]$ إن مجموعة كل هذه الدوال تشكل فضاء متجهيا حقيقيا لدى تزويدها بعمليتين جبريتين معرفتين على النحو الأتي :

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t)$$

$$(\alpha x)(t) = \alpha\ \big(x(t)\big) = \alpha\ x(t)$$

حيث أن αx، $x + y$ هما دالتان حقيقيتان مستمرتان معرفتان على $[a,b]$

Syria Math Team

ومن الفضاءات المتجهية الهامة الأخرى أيضا فضاء $B(A)$الدوال المحدودة والفضاء المتجهي لكل الدوال الفصولة مثل ℓ^pالفضاء المتجهي لكل الدوال الخاصة على$[a,b]$ والكمولة ريمانيا

الفضاء ℓ^2:

هذا الفضاء هو حالة خاصة من الفضاء ℓ^p (كل عنصر من الفضاء ℓ^p بأنه متتالية $x=(\xi_1,\xi_2,\dots.,\xi_n)$ من الأعداد بحيث تكون المتسلسلة متقاربة ξ_i

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p=|\xi_1|^p+|\xi_2|^p+\cdots+|\xi_n|^p$$

هو فضاء متجهي عملياته الجبريتان معرفتان بالطريقة التالية :

$$(\xi_1,\xi_2,\dots.)+(\eta_1,\eta_2,\dots.)=(\xi_1+\eta_1,\dots.)$$

$$\alpha(\xi_1,\xi_2,\dots.)=(\alpha\xi_1,\alpha\xi_2,\dots.)$$

$$x,y\in\ell^2:x=(\xi_1,\xi_2,\dots.)$$

$$y=(\eta_1,\eta_2,\dots.)$$

$$x+y\in\ell^2$$

بالعودة إلى متراجحة فينكوفسكي :

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|\ \ \right)^{p}\Bigg)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\ \right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_m|^p\ \right)^{\frac{1}{p}}$$

كذلك من الواضح $x\alpha\in\ell^2$

Syria Math Team

الفضاء الجزئي من الفضاء المتجهي X :

لتكن Yمجموعة جزئية وغير خالية من X ، بحيث أيا كان $y_1 , y_2 \in Y$ وايا كان العددين α , β فإن $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$ عندئذٍ ندعو Y فضاء متجهي جزئي عملياته هما مقصور العمليتين (داخلية / خارجية) المعرفتين على X

من الفضاءات الجزئية الخاصة من X : هو الفضاء الجزئي غير الفعلي أي $X = Y$ وكل فضاء جزئي Nخر$\{0\} \neq X$ من يسمى فضاء جزئي فعلي .

والتركيب الخطي للمتجهات $x_1, x_2, \dots x_n$ من الفضاء المتجهي X بأنه عبارة من الشكل $\alpha_1 x + \cdots \dots + \alpha_m x_m$ حيث $\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_m$ أي عدد

وإذا كانت M أي مجموعة جزئية وغير خالية من x فإن مجموعة كل التراكيب الخطية لمتجهات M تسمى مولد M ونرمز لها بالشكل $span\ M$

ومن الواضح أن هذا فضاء جزئي منX ، عندئذ نقول بأن Y مولد بالمجموعة M.

الاستقلال الخطي ، الارتباط الخطي :

يعرف الاستقلال والارتباط الخطي لمجموعة M من المتجهات $(r \geq 1)\ x_1, x_2, \dots x_n$

في فضاء متجهي X عن طريق المعادلة: $\alpha_1 x + \cdots \dots + \alpha_m x_m = 0$ حيث $\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_m$ أعداد أو معاملات .

عندئذ نميز حالتين :

1- إذا كانت جميع المعاملات أصفار حيث $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots . = \alpha_m = 0$ عندها تكون المجموعة M مستقلة خطيا
2- إذا كانت أحد الأمثال على الأقل لا يساوي الصفر عندها تكون M مرتبطة خطيا أي أن الاعداد $\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_m$ ليست جميعها أصفار عندها تكون المجموعة M مرتبطة خطيا .

ملاحظة :

إذا وجد المتجهة الصفري في المجموعة M فتكون المجموعة M مرتبطة خطيا .

Syria Math Team

إذا وجد قيمة واحدة على الأقل في مجموعة يكتب على الشكل تراكيب خطية للمتجهات الأخرى ، عندئذ تكون M مرتبطة خطيا .

الفضاءات المتجهية (منتهية البعد وغير منتهية البعد):

أبعاد الفضاءات المتجهي :

1- فضاء متجهي منتهي البعد مثال على ذلك : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ وبعد كل منها يساوي n وأيضا pفضاء كثير الحدود منتهي الأبعاد من الدرجة n
2- فضاءات جزئية غير منتهية البعد مثال على ذلك الفضاء $c[a,b], \ell^2$وفضاء كثير الحدود غير منتهي الحدود

قاعدة الفضاء المتجهي :

هي عبارة عن جملة من الأشعة المستقلة خطيا التي تولد الفضاء وعدد عناصر هذه القاعدة يساوي بعد الفضاء .

مثلا :

1- الفضاء $\mathbb{R}^2$هو فضاء شعاعي مولد بالقاعدة $w = \{(1,0).(0,1)\}$ حيث أن الشعاعين $(1,0).(0,1)$مستقلين خطيا وبعد $\mathbb{R}^2$ يساوي عدد عناصر القاعدة $\dim \mathbb{R}^2$
2- الفضاء $\mathbb{R}^3$ فضاء شعاعي مولد بالقاعدة $w = \{(0,0,1).(0,1,0)(1,0,0)\}$ حيث أن الأشعة مستقلة خطيا بعدها $\mathbb{R}^3$ يساوي عدد عناصر القاعدة$\dim \mathbb{R}^3 = 3$
3- إن أي حدود من أي درجة يكتب بدلالة القاعدة .

إذا كان لدينا $\dim x = n$ وكانت $\{e_1, e_2, \dots., e_n\}$ قاعدة ل x فإنه يوجد لكل $x \in X$ تمثيل وحيد على شكل تركيب خطي لمتجهات القاعدة :

$$x = a_1 e_1 + \cdots . + a_n e_n$$

ملاحظة :

يوجد لكل فضاء شعاعي عدد غير منتهي من القواعد لكن جميع هذه القواعد تحقق بأن لها عدد العناصر نفسه

Syria Math Team