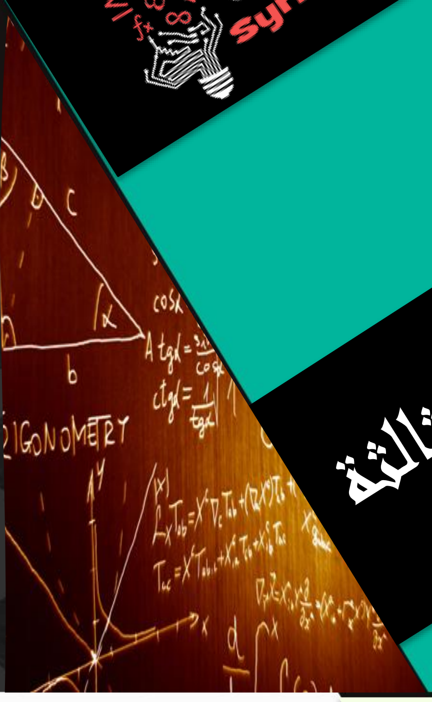
معك نحو

التخرج

Syria Math Team



السنة الثالثة

التحليل التابعي 1

المحاضرة 5

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2019-2023

نظري

◄ دكتور المادة: جمال مللي

◄المحاضرة الخامسة

عنوان المحاضرة : المتتاليات

تعريف تقارب متتالية في فضاء متري :

ليكن لدينا الفضاء المتري (X, d) وليكن لدينا $(x_n) \in X$ متتاليو من هذا الفضاء نقول عن هذه المتتالية إنها متقاربةإذا تحقق الشرطين المتكافئين:

-1
$$\forall \varepsilon > 0 \, ; \, \exists \, n_0 = n_0(\varepsilon) \, ; \quad n \geq n_0 \implies |d(x_n, x) - 0| < \varepsilon \implies d(x_n, x) < \varepsilon$$

-2 أن تكون المتتالية حقيقية $d(x_n, x)$ متقاربة من الصفر

إذا وجد عنصر x من X بحيث يكون :

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$$

تعريف المتتاليات الجزئية :

ليكن لدينا $\{x_n\}$ متتالية في R^n ولتكن $\{n_k\}$ متتالية الأعداد الصحيحة الموجبة حيث أن

$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots \ldots \ldots \ldots$ عندئذ نسمي $\{x_{n_k}\}$ متتالية جزئية من المتتالية $\{x_n\}$.

كيفية بناء متتالية جزئية من متتالية أصلية :

1- طريقة تركيب التوابع :

لتكن لدينا x متتالية $x : N \to R$ حيث $n \to x_n$

أي كل عدد طبيعي يقابله x_n نسميها الحد العام للمتتالية ، والان سننتقل من

N إلى N بدالة متزايدة تماما إلى R إذ أن هذا الانتقال يتم بواسطة تركيب التابعين f, g كما هة موضح

$$N \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} R$$
$$n \rightarrow n_k \rightarrow x_{n_k}$$

2- الطريقة العملية (ينصح ذكرها كما ذكرها الدكتور) :

لتكن لدينا المتتالية الحقيقية $\{x_n\}$ حيث بإمكاننا كتابتها بالشكل :

$$x_1, x_2, x_3, \dots\dots\dots\dots, x_{n-1}, x_n$$

نقوم باختيار عنصر لا على التعين من المتتالية الأصلية x_n ونضعه أول عنصر في المتتالية الجديدة

(فإذا اخترنا x_1 نسميه x_{1_1} نعطيه الدليل 1 كونه أول عنصر في المتتالية الجديدة)

ثم نقوم بحذف هذا العنصر المختار وحذف جميع العناصر الواقعة قبله .

ثم ننقل إلى يمين ونختار عنصر أخر(ليكن x_3 نسميه نعطيه الدليل 2 فيصبح العنصر الثاني في المتتالية الجديدة x_{3_2})

ثم نقوم بحذفه وحذف جميع العناصر الواقعة قبله ، نتابع بنفس الأسلوب حيث ان الانتقال إلى اليمين في عناصر المتتالية

وهكذا إذا اخترنا العنصر x_n من المتتالية الأصلية وبفرض أنه أصبح لدينا في المتتالية $k-1$ عنصر يكون دليل هذا العنصر الجديد k نسميه x_{n_k}

إذن نلاحظ أنه تشكل لدينا المتتالية الجزئية $\{x_{n_k}\}$ من المتتالية الأصلية $\{x_n\}$.

ملاحظة :

يمكننا تشكيل عدد غير منته من المتتاليات الجزئية (لأنه في كلا الطريقتين نلاحظ ان عدد عناصر المتتالية غير منته وكذلك التوابع المتزايدة عددها غير منته)

"فيما ما سبق مراجعة والان سنبدأ محاضرتنا "

تعريف تقارب متتالية في فضاء متري :

باستخدام النهاية :

ليكن لدينا الفضاء المتري (X,d) وليكن لدينا $(x_n) \in X$ متتاليو من هذا الفضاء نقول عن هذه المتتالية إنها متقاربة إذا وجد عنصر x من X بحيث يكون :

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$$

حيث أن التقارب هذا يتم في R (لأن المسافة بين الحد العام و النهاية عدد حقيقي)

وتسمى x نهاية المتتالية x_n وتكتب :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

عندئذ نقول بأن x_n تتقارب من X وإذا لم تكن متقاربة قلنا أنها متباعدة .

ونلاحظ أن $d(x_n,x)$ عدد حقيقي وبالتالي فإن تغير n في الحد $d(x_n,x)$ يعطي متتالية الأعداد الحقيقية ولتكن $a_n = d(x_n,x)$ وبالتالي فإن تقارب d يعرف تقارب المتتالية a_n أي أن :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

و هذا يفسر أن التقارب تم في $\mathbb{R}$.

هناك خاصيتين مألوفتين للمتتاليات المتقارية هما :

1- وحدانية النهاية
2- المحدودية

تنتقلان من الفضاء $\mathbb{R}$إلى الفضاءان المترية العامة .

نقول عن مجموعة جزئية M في X أنها مجموعة محدودة إذا كان قطرها

$\delta(M) = \sup(d(x,y)) < \infty \;\; x,y \in M$ عدداً محدوداً .

ونقول عن متتالية (x_n) فيX أنها متتالية محدودة إذا كانت المجموعة المؤلفة من حدودها مجموعة محدودة في X .

ومن الوضح إذا كانت M مجموعة محدودة فإن $M \subseteq B(x_0,r)$ حيث x_0 أي نقطة في X و rعدد حقيقي موجب و إن العكس صحيح .

بعض خواص المتتاليات المتقاربة (وحدانية النهاية والمحدودية) :

تمهدية (المحدودية ، النهاية) :

إذا كان لدينا $X=(X,d)$ فضاءً مترياً فإن :

1- كل متتالية متقاربة في X محدودة ونها يتها وحيدة .

الإثبات:

ليكن لدينا x_n متتالية ولنفرض أن هذه المتتالية متقاربة من x وبالتالي يكون لدينا حسب التعريف .

$$\forall \varepsilon > 0\ ;\ \exists\, n_0 \in N \quad ; \forall\, n \ge n_0 \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

كون ε عدد حقيقي اختياري مثبت لنختار $\varepsilon = 1$ عندئذ يكون $d(x_n,x) < 1$

ومنه أيا كان n فإن $d(x_n,x) < 1 + a$ حيث :

$$a = \max\{d(x_1,x), d(x_2,x), \dots \dots, d(x_n,x)\}$$

نلاحظ أن a هو عدد حقيقي حسب تعريف تابع المسافة وإن المجموعة

$$A = \{d(x_1,x), d(x_2,x), \dots \dots, d(x_n,x)\}$$

هي مجموعة محدودة كون عناصرها منتهية لذلك استطعنا أن نجد الـ max.

لنأخذ $k = a + 1$ عندئذ $B(x,k)$ ستحوي جميع عناصر المتتالية x_n

عندئذ $B(x,k)$ تحقق المطلوب .

تذكرة : تكون المجموعة محدودة إذا أمكن إيجاد كرة مفتوحة تحتويها

- والان نريد إثبات أن نهايتها وحيدة ولنفرض وجود نهايتين مختلفتين x, y للمتتالية x_n أي أنه :

$x_n \to x$ $\quad$ $,x_n \to y$ وبالتالي يكون لدينا فرضاً :

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y) = 0$$

بالاعتماد على خواص المترك (مراجعة المثلث) .

$$d(x,y) \le d(x,x_n) + d(x_n,y)$$

ولدينا أيضاً $d(x,y) \ge 0$

ونعلم أن x_n متقاربة من x و x_n متقاربةء من y فرضاً ومنه بأخذ نهاية الأطراف كالتالي.

$$0 \le d(x,y) \le d(x,x_n) + d(x_n,y)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} 0 \le \lim_{n\to\infty} d(x,y) \le \lim_{n\to\infty} [d(x,x_n) + d(x_n,y)]$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} d(x,y) \leq 0$$

ومنه وحسب مبرهة الإحاطة يكون $\lim_{n\to\infty} d(x,y) = 0$

أي أن $d(x,y) = 0$ وبالتالي حسب خواص المترك يكون $x = y$ أي أن النهاية وحيدة .

تنويه :

إن التقارب في هذه المبرهنة وكذلك المحدودية هو في $\mathbb{R}$ كون d عدد حقيقي.

2 –إذا كان $x_n \to x$ ، $y_n \to y$ في X فإن $d(x_n, y_n) \to d(x,y)$

البرهان :

استنادا إلى أن كل متتالية متقاربة في Xمحدودة ونهايتها وحيدة نجد :

$$|d(x_n, y_n) - d(x,y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \to 0 \qquad \text{عندما } n \to \infty$$

مقدمة :

مفهوم التمام في الفضاءات المترية ،ذلك المفهوم الذي سيكون أساس أبحاثنا القادمة ، وسنرى أن التمام لا ينتج عن خواص الفضاء المترك وذلك ثمة فضاءات مترية ليست تامة، وبعبارة أخرى فإن التمام هو خاصة إضافية قد يتمتع أو لا يتمتع بها فضاء متري .

خاصة التمام هي خاصة تجعل الفضاءات التامة أجود و أبسط من الفضاءات غير تامة .

تعريف متتالية كوشي (الأساسية):

نقول عن متتالية $\{x_n\}$ في فضاء متري $X = (X,d)$ أنها متتالية لكوشي (متتالية أساسية)
إذا وجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح $n_0 = n_0(\varepsilon)$ بحيث يكون .
$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$
أيا كان العددان الصحيحان n,m المحققان للشرط $n,m \geq n_0$: أي
$$\forall \varepsilon > 0 \,;\, \exists\, n_0 \in N \,; \quad n,m \geq n_0 \quad \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$
ويقال عن الفضاء X أنه تام إذا كانت كل متتالية لكوشي فيه متقاربة((إذا وجد لها نهاية منتمية إلى X))

مبرهنة : ((المحور الحقيقي ، المستوي العقدي))

إن المحور الحقيقي والمستوي العقدي هما فضاءان متريان تامان .

نجد من التعريفات مباشرة أن الفضاءات التي يبقى فيها شرط كوشي $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ شرطا لازما وكافي للتقارب

بعض من الفضاءات المترية غير تامة البسيطة والتي يمكن الحصول عليها بسرعة .

مثال :1- $R\backslash\{a\}$ حذف a من محور الأعداد الحقيقية

2- Qحذف كل الأعداد غير العدية يعطي المحور العادي
3- $[a,b]$المزودة بمقصور المترك المعرفة ع R

مثال :

ليكن $X = [0,1]$ المزودة بالمترك المألوف المعرف بالمساواة : $d(x,y) = |x - y|$

نأخذ متتالية$\{x_n\}$: $;n = 1,2,3,00000000$ $\quad x_n = \frac{1}{n}$

هذه متتالية كوشية ، ولكنها ليست متقاربة : لأنه عندما تتقارب من 0 لا يمكن ذلك لأن 0 ليس نقطة من 0.

نجد أن من هذا المثال أن الشرط $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ في الفضاء المتري كيف قد لا يكون كافيا للتقارب وذلك أن الفضاء قد يكون غير تام .

ومنه نجد أن التقارب ليس خاصة ذاتية للمتتالية نفسها .

وإنما يعتمد على الفضاء الذي تقع فيه المتتالية

أي لابد أن تتقارب من نقطة من الفضاء

وبما أن الشرط $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ غير كافي للتقارب و فلا بد أن يبقى شرطا لازما للتقارب .

مبرهنة :

كل متتالية متقاربة هي متتالية كوشية ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح .

البرهان :

نفرض أن $\{x_n\}$ متتالية متقاربة من $x \in X$

فإنه يوجد عدد موجب صحيح $n_0 = n_0(\varepsilon)$ لأجل $\frac{\varepsilon}{2}$ بحيث ان :

$$d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$$

أيا كان العدد n المحقق للشرط $n \geq n_0$:

حسب متباينة المثلث أيا كان $n,m \geq n_0$:

$$d(x,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$d(x_m,x_n) \leq d(x_n,x)+d(x,x_n)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

أذن من أجل $\varepsilon > 0$ وجدنا $n \ni N$ بحيث :

$$n,m \geq n_0 \qquad \Rightarrow d(x_n,x_m)<\varepsilon$$

وبالتالي $\{x_n\}$ كوشية .

مبرهنة (اللصاقة , المجموعة المغلقة):

ليكن لدينا (X,d) فضاء متري وليكن لدينا M مجموعة جزئية من X غير خالية ولتكن $\bar{M}$ لصاقتها عندئذٍ.

1ـ -الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \in \bar{M}$ هو أن توجد متتالية $\{X_n\}$ في M بحيث $x_n \to x$

الإثبات :

$(\Rightarrow)$ لنفرض أن $x \in \bar{M}$ عندئذٍ:

إما $x \in M$ فإن المتتالية الثابتة $x,x \ldots \ldots \ldots, x \to x$ إن هذه المتتالية الثابتة تسعى إلى x.

إذن استطعنا إيجاد متتالية من عناصر M تسعى إلى x ومنه يتم المطلوب.

أما إذا كانت في $x \notin M$ فإن x نقطة تراكم ل M ولنأخذ الكرة مفتوحة $B(x,\varepsilon)$ مركزها x ونصف قطرها ε وليكن $(\varepsilon=\frac{1}{n})$ تتقاطع مع M بتقاطع غير فارغ عندئذ يوجد عنصر حيث :

$$n=1,2,3 \ldots \ldots \ldots \ldots, d(x,x_n)<1$$

$$n=1 \Rightarrow \varepsilon=1 \qquad ; x_1 \in B(x,1); d(x_1,x)<1$$

$$n=2 \Rightarrow \varepsilon=\frac{1}{2} \qquad ; x_2 \in B\left(x,\frac{1}{2}\right); d(x_2 x)<\frac{1}{2}$$

.

$$;x_n \in B\left(x,\frac{1}{n}\right)\ ;d(x_n,x)<\frac{1}{n} \qquad n=n\Longrightarrow \varepsilon=\frac{1}{n}$$

وبالتالي أصبح لدينا عدد غير منته من الكرات التي مركزها x ونصف قطرها يسعى إلى الصفر وبالتالي إذا أخذنا المتتالية

$(x_1,x_2,x_3\ldots\ldots\ldots,x_n)$ حيث هذه العناصر من M ومختلفة عن x وإن :

$$0\le d(x_n,x)<\frac{1}{n}$$

لنأخذ نهاية الأطراف.

لدينا $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ ، $\lim_{n\to\infty}0=0$

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$$

وذلك حسب مبرهنة الإحاطة . أي أن $x_n\to x$

$(\Leftarrow)$ إثبات العكس :

لنبرهن أن $x\in\bar{M}$

إذا كانت x_n متتالية في M بحيث $x_n\to x$ فإن $x\in M$ (وضوحا)

أما في حالة $x\notin M$:

أي أن كل جوار للنقطة x سوف يحوي نقاط من x_n مغايرة للنقطة x وعندها فإن x نقطة تراكم للمجموعة M ، لذا $x\in\bar{M}$ وذلك استنادا إلى أن أي جوار ل x محتواة في M :

$$\forall r>0\,;\mathrm{B}(x,r)\cap M\neq\emptyset$$

وبالتالي فإن x نقطة ملاصقة حسب تعريف اللصاقة أي $x\in\bar{M}$. ويتم المطلوب

2 - الشرط اللازم والكافي كي تكون M مغلقة هو أنه إذا كانت x_n أي متتالية من عناصر M متقاربة من x فإن $x\in M$

الإثبات :

M مغلقة $\Leftrightarrow$ إذا $x_n\to x \Longrightarrow x_n\in M$ فإن $x\in M$

$(\Leftarrow)$نعلم أن إذا كانت M مغلقة فإن $M=\bar{M}$

نعلم أن $\bar{M}$ هي تقاطع كافة المغلقات التي تحوي M وبالتالي هي مغلقة .

((لأنه التقاطع المنتهي وغير المنتهي لأسرة من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة))

أي $M \subseteq \bar{M}$ لإثبات أن M محتواة في $\bar{M}$ هو :

$\bar{M}$ أصغر مجموعة مغلقة تحوي M لأنه لو كانت H مغلقة تحوي M عندئذ :

$$\bar{M} = H \cap \{F = X \backslash B(x, \varepsilon_0) \text{مغلقة} \Rightarrow M \subseteq F ; F \neq H\}$$

$$\Rightarrow \bar{M} \subseteq H$$

و $H \subseteq M$ عندئذ فإن $M \subseteq \bar{M}$

حيث H أي مغلقة تحوي M وبالتالي $\bar{M}$ أصغر مجموعة مغلقة تحوي M

إن M مغلقة فرضا عندئذ وبما أن $M \subseteq M$ (كل مجموعة تحوي نفسها)

فإن M إحدى المجموعات المغلقة التي ناتج تقاطعها يساوي $\bar{M}$

وبالتالي $M \subseteq \bar{M}$ يتم المطلوب .

$(\Longrightarrow)$ لنفرض الأن أن $\{x_n\}$ متقاربة من x أي أنه $x_n \to x \implies \forall x \in \overline{M}$

وحسب الفرض لدينا $\bar{M} \subseteq M \implies x \in M$

ولدينا عموماً أن $M \subseteq \bar{M}$ ومن الأحتوائين السابقين نجد أن $\bar{M} = M$ ومنه M مغلقة

يتم المطلوب.

تعريف الفضاء المترى التام :

ليكن (X, d) فضاء متري نقول عن x أنه فضاء تام إذا كانت كل المتتاليات الكوشية في هذا الفضاء متقاربة فيه ((أي وجد لها نهاية تنتمي إلى هذا الفضاء X))

مبرهنة الفضاء الجزئي التام :

الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء الجزئي M من فضاء متري تام X فضاءاً متريا هو أن تكون المجموعة مغلقة M في X .

الإثبات :

M مغلقة $\Leftrightarrow$ M تامة

$\Leftarrow$ لنفرض أن M فضاءاً جزئياً تاماً ولنثبت أن M مغلقة أي نريد إثبات أن $M = \bar{M}$.

لنأخذ $x \in \overline{M}$ حيث x اختياري عندئذ حسب مبرهنة اللصاقة يوجد متتالية من عناصر $(x_n \in M)$ تسعى لـ x أي $x_n \to x \implies x_n \in M$

إن $x \in X$ لأن X فضاءاً كلياً وإن تقارب المتتالية x_n يتم بخصوص الطبولوجيا المعرفة على X وكون X تام فإن x_n متتالية كوشية و إن خاصية الكوشية هذه تنطبق على M بخصوص نفس الطبولوجيا المعرفة

وبما أن M تاما ((فرضا)) فإن x_n متقاربة ولها نهاية في M وكذلك لها نهاية في X ولإن نهايتها وحيدة حسب تعريف التقارب فإن هذا التقارب يتم في M ويكون لدينا $\bar{M} \subseteq M \implies x \in M$

ومن الأحتوائيين السابقين نجد أن $M = \bar{M}$ ومنه M مغلقة

$\Rightarrow$لنفرض أن M مغلقة ولنثبت أن M تامة .

((نأخذ متتالية كوشية من M ولنثبت أنها متقاربة كي يكون M تام))

لتكن لدينا x_n كوشية من Mوكون الفضاء X تاما فإن x_n متقاربة من $x \in X$

وليكن لدينا فرضاً Mمغلقة فهي تحوي على نقاط تجمعها عندئذ $x \in M$ وبالتالي تكون المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة في M وبالتالي وجدنا أنه أي كوشية في M هي متقاربة عندئذ M فضاءاً تام .

انتهت المحاضرة

إعداد: رولا الشيخ ، تقى إسماعيل ، بسمة نصر الله