معك نحو

التخرج

Syria Math Team

التحليل التابعي 1

المحاضرة 18

السنة الثالثة

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 3rd year

◄دكتور المادة: جمال مللي

◄المحاضرة الثامنة عشر

فضاء متجهي جزئي :

$$\forall\, x, y \in F;\ \forall\, \alpha, \beta \in K$$

$$\alpha x + \beta y \in F$$

فضاء أفيني (تألفي) جزئي :

$$\forall\, x, y \in F;\ \forall\, \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in F$$

$$\forall \alpha \in k\ ;\ \alpha x + (1 - \alpha) y \in F$$

المجموعة المحدبة : أعداد حقيقية

$$\forall\, x, y \in F;\ \forall\, \alpha, \beta \in [0,1] \Rightarrow \alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in F$$

تمرين :

المجموعة المحدبة – القطعة المستيمة

يقال عن مجموعة جزئية Aمن فضاء متجهي Xإنها محدبة اذا اقتضى وقوع أي نقطتين x, yمن Aتحقق العلاقة: $M = \{ Z \in X |\_z = \alpha x + (1 - \alpha) y\ ; 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset A$

أثبت أن الكرة المغلقة مجموعة محدبة : ((المحدب يتعلق بالبنية التبولوجيا))

الحل :

ليكن لدينا الفضاء المتري $(E\ , ||.||)$حيث $r > 0$ ولتكن مجموعة محدبة $\bar{B}\ (0, r)$

$$x, y \in \bar{B}\ (0, r) \Rightarrow ||x|| \leq r$$

$$\Rightarrow ||y|| \leq r$$

$$\forall\, \alpha \in [0,1]\ ;\ \alpha x + (1 - \alpha) y$$

$$||\alpha x + (1-\alpha)y\,|| \le ||\alpha x|| + ||(1-\alpha)y||$$

$$= |\alpha|\;||x|| + |(1-\alpha)|\;||y||$$

$$= \;\alpha\;||x|| + (1-\alpha)\;||y||$$

$$\le\; \alpha r + (1-\alpha) r = r$$

$$\forall\; \alpha \in [0,1]\;;\; \alpha x + (1-\alpha) y \;\in \bar{B}\,(0, r)$$

تمرين:

$$\ell^2 = \left\{ x = (\xi_n) \in \;\mathbb{C}^n \;;\; \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \;\infty \right\}$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in N} \in \ell^2 \qquad ; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

هل يمكن كتابة هذا العنصر على شكل تركيب خطي ؟

$$\alpha_j = \frac{1}{j}\;\; e_j \qquad ; (1, \frac{1}{2}, \ldots.., \frac{1}{n}, 0, ..)$$

هذه المتجهات لا يمكن أن تكون قاعدة هامل في هذا الفضاء ولكنها قاعدة شاودر ولكن تضمن وجود قاعدة هامل لكن مؤكد أنها ليست هذه $\frac{1}{n}$

تمرين:

برهن أنه إذا كان $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ و $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ فإن $x_n + y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x + y$.

و أثبت أنه إذا كان $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ و $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ فإن $a_n x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a\,x$.

الحل :

بما أن $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ و $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ فإن $||x_n - x|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ و $||y_n - y|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ومنه:

$$||x_n + y_n - (x+y)|| = ||(x_n - x) + (y_n - y)|| \leq$$

$$||x_n - x|| + ||y_n - y|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 + 0 = 0$$

وبالتالي $x_n + y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x + y$.

وبما أن $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ و $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ فإن $|a_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ و $||x_n - x|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ،
والمتتالية $(a_n)_{n\in N}$ محدودة(كونها متقاربة) ، أي يوجد $c > 0$ بحيث $|a_n| \leq c$ لأي $n \in N$ ومنه :

$$||a_n x_n - ax|| = ||a_n x_n - a_n x + a_n x - ax ||$$
$$= ||a_n(x_n - x) + (a_n - a)x|| \leq$$

$$||a_n(x_n - x)|| + ||(a_n - a)x||$$
$$= |a_n|\, ||x_n - x|| + |a_n - a|||x|| \leq$$

$$c\, ||x_n - x|| + |a_n - a|||x|| \xrightarrow[n\to\infty]{} c(0) + (0)||x|| = 0 + 0 = 0$$

وبالتالي $a_n x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a\, x$

نستنتج أن قانوني التشكيل : $+ : E * E \ \to E$

$(x, y) \to x + y$

$. : \mathrm{E} * \mathrm{K} \ \to E$

$(\alpha\ , x\ ) \to \alpha x$

الفضاء المتجهي التبلولوجي :

هو فضاء متجهي Eعلى الحقل Kمزود بتبلولوجيا τوهذه التبلولوجيا تجعل قانوني التشكيل مستمريين ، كل فضاء منظم هو فضاء متجهي تبولوجي هو فضاء منظم

والفضاء المتجهي هو معمم على الفضاء المنظم حيث أن التبولوجيا τمنسجمة مع بنية الفضاء المتجهيE

-في الفضاء المتجهي التبولوجي يمكن أن نتحدث عن المحدودية وعن التمام فيه .

تمرين 2 :

أثبت أن اللصاقة $\bar{Y}$ للفضاء الجزئي Y من فضاء منظم X هي أيضاً فضاء متجهي جزئي .

الحل :

ليكن x,y من $\bar{Y}$، حسب مبرهنة النقطة الملاصقة توجد متتاليتان $(x_n)_{n\in N}$ و $(y_n)_{n\in N}$ من عناصر Y بحيث $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ و $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ أي $||x_n - x|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ و $||y_n - y|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ وليكن α, β عددين من الحقل K .

فإن $(\alpha x_n + \beta y_n)_{n\in N}$ متتالية من عناصر Y ، وبالتالي :

$$\begin{aligned}||\alpha x_n + \beta y_n - (\alpha x + \beta y)|| &= ||(\alpha x_n - \alpha x) + (\beta y_n - \beta y)||\\ &= ||\alpha(x_n - x) + \beta(y_n - y)||\\ &\le ||\alpha(x_n - x)|| + ||\beta(y_n - y)||\\ &= |\alpha|\,||(x_n - x)|| + |\beta|\,||(y_n - y)|| \xrightarrow[n\to\infty]{} |\alpha|(0) + |\beta|(0)\\ &= 0\end{aligned}$$

والذي يبين أن المتتالية $(\alpha x_n + \beta y_n)_{n\in N}$ من عناصر Y متقاربة من $\alpha x + \beta y$

وبالتالي $\alpha x + \beta y \in \bar{Y}$ أي $\bar{Y}$ فضاء متجهي جزئي

ما هو الفرق بين نصف النظيم وشبه النظيم ؟

نصف النظيم : هو دالة من E إلى R

$$p : E \to R$$

$$p(x) \ge 0$$

$$x = 0 \iff p(x) = 0$$

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$$

$$p(x + y) \le p(x) + p(y)$$

شبه النظيم :

$$q : E \to R$$

$$q(x) \geq 0$$

$$x = 0 \;\Leftrightarrow q(x) = 0$$

$$p(\,x) = p(-x)$$

$$q(x+y) \leq q(x) + q(y)$$

كل نظيم هو شبه نظيم :

بالعودة إلى أحدى الأمثلة السابقة

ليكن لدينا النظيم (الفضاء المنظم)$(E\,, ||.||)$

لنبين أنه نصف نظيم $||\quad||_n$

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{||x-y||_n}{1 + ||x-y||_n}$$

إن dهي أسرة أنصاف نظيم وتكون عندها dنصف مسافة ولكن عند إضافة الشرط الأتي :

$$\forall\, x \;\in \{0\};\; \exists\, n \;\in N\,;\, ||x||_{n_0} > 0$$

فإن dستصبح مسافة .

انتهت المحاضرة

إعداد: رولا الشيخ و تقى إسماعيل و بسمة نصر الله