معك نحو

التخرج

Syria Math Team

نظرية الاحتمالات

السنة الثالثة

المحاضرة 20و21

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 3rd year

نظري

◄ دكتور المادة: أحمد الغصين

◄ المحاضرة : العشرون و الحادية و العشرون

◄ عنوان المحاضرة : سلاسل ماركوف

عملية بواسون :

تعريف : نقول عن تجربة ما إنها تخضع لسلسلة ماركوف إذا كان نتيجة هذه التجربة تنتمي إلى فضاء النتائج العامة :

1– $\{a_1 , a_2 , \dots , a_n \} , E_1 , E_2 , \dots , E_n$

2– أن تكون التجربة الأولى تتبع مباشرة نتيجة التجربة الثانية .

تعريف : يقال عن العملية العشوائية $(X_t)_{t\epsilon N}$ إنها عملية بواسون بالوسيط $\lambda > 0$

إذا كان

1– $x(0) = 0$ أي بداية الزمن

2– العملية (X_t) أي في لحظة t تكون مستقلة عن العملية التي تحدث بعدها

$$\{ X(t+s) - X(t)\}$$

وبالتالي يمكننا أن نكتب بعد هذه العملية أن :

$$X\,(t) = \begin{cases} 0 & ;\ 0 < t < t_1 \\ 1 & ;\ t_1 < t < t_2 \\ & \quad \vdots \\ n & ;\ t_n < t < t_{n+1} \end{cases}$$

شروط عملية بواسون :

نعطي أولاً بعض الفرضيات ثم سنذكر الشروط :

1– نفرض أن الدالة $f_x(t)$ هي احتمال وقوع x حادثة في الفترة $(0,t)$ أي التي طولها t بمعنى أن :

$$p[X(t)=x]=f(t)$$

2– Δt فترة زمنية قصيرة ..

3– $O(\Delta t)$ فترة صغيرة جداً مقارنة مع Δt وبحيث يكون $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{O(\Delta t)}{\Delta t}=0$

أما **شروط عملية بواسون** :

أ– احتمال وقوع حدث واحد أو تغير واحد في فترة زمنية طولها (Δt) هو

$$\lambda\Delta t+O(\Delta t)$$

حيث λ مقدار ثابت يمثل المعدل الذي قع فيه الحوادث في المتوسط أو معدل وقوع الحوادث في وحدة الزمن بمعنى :

$$f_1(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

ب – احتمال وقوع أكثر من حادثة واحدة في فترة زمنية طولها Δt هو $o(\Delta t)$ أي :

$$\sum_{x=2}^{\infty}f_x(\Delta t)=o(\Delta t)$$

ج – عدد الحوادث أو التغيرات التي تقع (تحدث) في فترة زمنية منفصلة بمعنى أن عدد الحوادث التي تقع في الفترة $(t,t+\Delta t)$ يكون مستقلاً عن عدد الحوادث التي تقع في أي فترة زمنية غير متقاطعة معها .

توزيع عدد الحوادث :

يمكن الحصول على التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث $X(t)$ التي تقع خلال الفترة الزمنية : $(t,t+\Delta t)$ عندئذٍ يمكن إمكانية وقوع x حادثة في الفترة الزمنية

$(0,t+\Delta t)$:

1- وقوع x حادثة في الفترة الزمنية $(0\,,t)$ وعدم وقوع أي حادثة في الفترة الزمنية Δt

2- وقوع $x-1$ في الفترة الزمنية $(0\,,t)$ ووقوع حادثة واحدة في الفترة الزمنية التي طولها Δt

$$f_x(t+\Delta t) = f_x(t)[1-\lambda(\Delta t)] + f_{x-1}(t)[\lambda \Delta t] + o(\Delta t)\ ;\ x \geq 1 \ \ldots.(1$$

$$f_0(t+\Delta t) = f_0(t)[1-\lambda \Delta t] + o(\Delta t) \quad ; \quad x=0 \quad \ldots(2$$

$$\frac{f_0(t+\Delta t)-f_0(t)}{\Delta t} = -\lambda f_0(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f_0(t+\Delta t)-f_0(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left\{-\lambda f_0(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\} = -\lambda\, f_0(t)$$

$$\Rightarrow f_0\,`(t) = -\lambda f_0(t) \quad \ldots(3$$

أما في حالة $x \geq 1$ يمكن كتابتها بالشكل :

$$f_x(t+\Delta t) - f_x(t) =$$

$$-\lambda f_x(t)\,\Delta t - f_x(t)\Delta t - f_x(t).o(\Delta t) + f_{x-1}(t).\lambda\Delta t + f_{x-1}(t).o(\Delta t)$$

ومنه :

$$\frac{f_x(t+\Delta t)-f_x(t)}{\Delta t} = -\lambda f_x(t) + \lambda f_{x-1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

نأخذ النهاية :

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f_x(t+\Delta t)-f_x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left\{-\lambda f_x(t) + \lambda f_{x-1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right\}$$

$$\Rightarrow f_x\,`(t) = -\lambda f_x(t) + \lambda f_{x-1}(t) \quad \ldots(4$$

ومنه نجد أن :

$$\frac{f_o\,`(t)}{f_o(t)} = -\lambda \quad \Rightarrow f_o(t) = c\, e^{-\lambda t}$$

نحدد الآن قيمة الثابت c :

وبما أن $f_0(0) = 1$ فإن $c = 1$:

$$f_0(t) = e^{-\lambda t} \quad ; \quad x = 0 \qquad ...(5$$

$$f_x(t) = e^{-\lambda t}\, q_x(t) \quad ..(6$$

بالاشتقاق نحصل على :

$$f_x`(t) = -\lambda e^{-\lambda t}\, q_x(t) + e^{-\lambda t}\, q_x`(t)$$

$f_x(t) = e^{-\lambda t} q_x(t)$ فإن $f_{x-1}(t) = e^{-\lambda t}\, q_{x-1}(t)$

وبالتعويض في المعادلة :

$$q_x`(t) = \lambda q_{x-1}(t) \quad ; \quad x = 1,2,3,.. \qquad ..(7$$

وبما أن : $f_0(t) = e^{-\lambda t}$

فإن $q_o(t) = 1$

وكذلك $q_0(0) = 0$ حيث $;x > 0$

نجد من مجموع المعادلات 7) وبالتعويض المتتالي نحصل على :

- $q_1`(t) = \lambda q_0(t) = \lambda \quad \overset{\text{تكامل}}{\Longrightarrow} \quad q_1(t) = \lambda t$

$$q_2`(t) = \lambda q_1(t) = \lambda^2 t \quad \Rightarrow \quad q_2(t) = \frac{\lambda^2 t^2}{2!}$$

$$q_3`(t) = \lambda q_2(t) = \frac{\lambda^3 t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad q_3(t) = \frac{(\lambda t)^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$q_x(t) = \frac{(\lambda t)^x}{x!}$$

وبالتعويض بالمعادلة 6) نحصل على :

$$f_x(t) = \frac{(\lambda t)^x \, e^{-\lambda t}}{x!} \qquad ; x = 0,1, \dots \quad (8$$

وهذه الدالة الاحتمالية لعدد الحوادث $X(t)$ وبالتالي $X(t)$ يتبع توزيع بواسون بوسيط (λt) .

ملاحظة : عندما $t \to \infty$ فإن توزيع $X(t)$ يقترب من التوزيع الطبيعي وتكون النسبة $\frac{V[X(t)]}{E[X(t)]}$ مقدار ثابت يساوي الواحد .

مثال :

إذا علم أن أحد أنواع البكتريا يتواجد في الماء بمعدل 2 بكتريا لكل سنتيمتر مكعب من الماء ..

فما احتمال أن تحوي عينة مكونة 2.5 سنتيمتر مكعب من الماء على 3 بكتريا على الأقل (هنا t تدل على الحجم)

الحل :

معدل تواجد البكتريا : $\lambda = 2$ لكل سنتيمتر مكعب

حجم العينة $t = 2.5$ سنتيمتر مكعب

عدد البكتريا X يتبع توزيع بواسون بمعلمة : $\lambda t = 2\,(2.5) = 5$

ومنه : $f_x(x) = \frac{\lambda t \, e^{-\lambda t}}{x!}$

$$f(x) = \frac{e^{-5}\,(5)^x}{x!} \qquad ; x = 0,1,$$

لأنه على الأقل

$$p(X \geq 3) = 1 - p[X < 3]$$

$$= \; 1 - f(0) - f(1) - f(2)$$

$$= 0.125$$

انتهت المحاضرة العشرون ..

الأربعاء : 2019/12/11

الفصل السادس :

تطبيقات نظرية الاحتمالات

ـ نظرية صفوف الانتظار :

تعتبر صفوف الانتظار من المجالات الحديثة التي تستخدم فيها نظرية الاحتمالات لأن فترات الانتظار تشترك جميعها في شيء واحد وهو عنصر الانتظار في كافة المجالات

تنشأ عملية الانتظار بسبب العشوائية (عمل مراكز التوزيع) التي تقوم بأداء الخدمة ..

لأداء الخدمات بشكل جيد يجب على الأغلب ترتيب العناصر أو الوحدات على شكل صفوف تدعى صفوف الانتظار ويتكون صف الانتظار عندما تصل الوحدات أو العناصر إلى مركز الخدمة وتجد الموظف القائم بأداء الخدمة مشغولاً بخدمة وحدة أخرى أو عنصر آخر وعندئذٍ يتشكل الصف .

صفوف الانتظار :

لدراسة أي نظام صفي يجب أن تتوفر لدينا معلومات ضرورية عن :

1ـ عملية وصول الوحدات : الفاصل الزمني بين لحظات وصول الوحدات وقد يكون هذا الفاصل الزمني ثابتاً وقد يكون متحولاً عشوائياً يتبع توزيعاً احتمالياً . وقد تأتي الوحدات مجتمعة وقد يكون المصدر إما محدود أو غير محدود ..

2ـ عملية الخدمة : هنا قد تكون فترة أداء الخدمة ثابتة أو متحول عشوائي يتبع توزيعاً احتمالياً .وتتم خدمة الوحدات واحدة تلو الأخرى أو مجموعات ثابتة أو متغيرة العدد وأداء الخدمة يكون بشخص واحد أو أكثر

3ـ قاعدة اختيار الوحدات لأداء الخدمة لها

هناك عدة طرق يتم من خلالها اختيار الوحدات منها :

ـ اختيار الوحدات طبقاً لأولوية وصولها $(FIFO)$

ـ اختيار الوحدات التي وصلت أخيراً إلى النظام $(LIFO)$

ـ اختيار الوحدات من النظام بطريقة عشوائية $(SIRO)$

ابسط نماذج الانتظار :

يعتبر النموذج $M\ /\ M\ /\ 1\ /\ \infty\ /\ FIFO$ أبسط النماذج وفيه نفرض ما يلي :

1ـ تأتي الوحدات أو العناصر إلى النظام الصفي وفقاً لتوزيع بواسون و أن الفترات الزمنية التي تفصل بين لحظات وصولها تتبع توزيع أسي (M) $A(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

حيث λ هو معدل وصول الوحدات إلى النظام لأن متوسط أطوال الفترات التي تفصل بين لحظات وصول الوحدات هو $(\frac{1}{\lambda})$

2ـ أطوال فترات خدمة الوحدات تتبع توزيع أسي أيضاً (M) $B(t) = \mu e^{-\lambda\mu}$

حيث μ هو معدل خدمة الوحدات وذلك لأن متوسط أطوال فترات الخدمة هو $(\frac{1}{\mu})$

3ـ هناك شخص واحد يقوم بأداء الخدمة وسعة مكان الانتظار غير محدود ، كما يتم اختيار الوحدات من الصف لأداء الخدمة تبعاً للقاعدة $FIFO$

معادلات النموذج

نفترض في كتابة هذه المعادلات أن الرمز $p_n(t)$ يرمز إلى احتمال وجود n من الوحدات حيث $n \geq 0$ في النظام (انتظار + خدمة) عند الوقت t . وأنه في خلال الفترة الزمنية القصيرة Δt حيث Δt مقدار صغير يؤول إلى الصفر يكون :

1) احتمال عدم وصول وحدات في الزمن Δt هو

$$p_n(\Delta t) = e^{-\lambda\Delta t} = 1 - \lambda\Delta t + O(\Delta t)$$

2) احتمال وصول وحدة واحدة في الفترة الزمنية Δt هو

$$p_1(\Delta t) = (\lambda\Delta t)e^{-\lambda\Delta t} = \lambda\Delta t[1 - \lambda\Delta t + O(\Delta t)]$$

$$= \lambda\Delta t + O(\Delta t)$$

3) احتمال وصول وحدتين فأكثر في الفترة الزمنية القصيرة Δt هو

$$1-p(\Delta t)-p(\Delta t)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\lambda\Delta t)^{n}\,e^{-\lambda\Delta t}}{n!}=O(\Delta t)$$

وبالمثل فإن :

1) احتمال عدم اكتمال خدمة أي وحدة في الزمن Δt هو

$$1-\mu\Delta t+O(\Delta t)$$

2) احتمال اكتمال خدمة وحدة واحدة في الفترة الزمنية Δt هو

$$\mu\Delta t+O(\Delta t)$$

3) احتمال اكتمال خدمة أكثر من وحدة واحدة في الفترة الزمنية القصيرة Δt هو

$$O(\Delta t)$$

نلاحظ أن الاحتمال $p_0(t+\Delta t)$ وهو احتمال عدم وجود أية وحدات في النظام عند الوقت $t+\Delta t$ يتكون من مجموع الاحتمالات التالية :

أ ـ احتمال عدم وجود وحدات في النظام عند الوقت t وعدم وصول أية وحدة في خلال الزمن القصير Δt وعدم اكتمال خدمة أية وحدة في خلال الزمن القصير Δt

ب ـ احتمال وجود وحدة واحدة في النظام عند الوقت t وعدم وصول أية وحدة في خلال الزمن القصير Δt واكتمال خدمة وحدة واحدة في خلال الزمن القصير Δt

ج ـ مجموعة من الاحتمالات الصغيرة التي يمكن تجاهلها ويرمز لها بالرمز $O(\Delta t)$

ويمكن كتابة هذا الاحتمال بالشكل :

$$p_0(t+\Delta t)=p_0(t)[1-\lambda\Delta t+O(\Delta t)][1]+$$

$$+p_1(t)[1-\lambda\Delta t+O(\Delta t)][\mu\Delta t+O(\Delta t)]+O(\Delta t)\quad(1-6)$$

كما نلاحظ أن الاحتمال $p_n(t+\Delta t)$ حيث $n\geq 1$ هو احتمال وجود $n\geq 1$ من الوحدات في النظام عند الوقت $t+\Delta t$ يتكون من مجموع الاحتمالات التالية :

أ ـ احتمال وجود n وحدة في النظام عند الوقت t وعدم وصول أية وحدة في خلال الزمن القصير Δt وعدم اكتمال خدمة أية وحدة في خلال الزمن القصير Δt

ب ـ احتمال وجود $n-1$ وحدة في النظام عند الوقت t . وصول وحدة واحدة في خلال الزمن القصير Δt عدم اكتمال خدمة أي واحدة في خلال الزمن القصير Δt

ج ـ احتمال وجود $n+1$ وحدة في النظام عند الوقت t . عدم وصول أي وحدة في خلال الزمن القصير Δt ، اكتمال خدمة وحدة واحدة في خلال الزمن القصير Δt

د ـ مجموعة من الاحتمالات الصغيرة التي يمكن تجاهلها وذلك بسبب صغر الفترة الزمنية Δt . وهي الاحتمالات لتي تتضمن وقوع حدثين أو أكثر في خلال هذه الفترة القصيرة ويرمز لها بالرمز $O(\Delta t)$

وبالتالي يمكن كتابة الاحتمال $p_n(t+\Delta t)$ حيث $n \geq 1$ بالشكل :

$$p_n(t+\Delta t) = p_n(t)[(1-\lambda\Delta t + O(\Delta t))(1-\mu\Delta t + O(\Delta t))]$$

$$+p_{n-1}(t)[\,(\lambda\Delta t + O(\Delta t))(1-\mu\Delta t + O(\Delta t))\,]$$

$$+p_{n+1}(t)[\,(1-\lambda\Delta t + O(\Delta t))(\,u\Delta t + O(\Delta t))] + O(\Delta t) \quad (2-6)$$

أن العلاقة $(1-6)$ يمكن كتابتها بالشكل التالي :

$$\frac{p_o(t+\Delta t) - p_o(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t) + \ \mu p_1(t) + \frac{O(\Delta t)}{\Delta t}$$

لنأخذ نهاية الطرفين عندما $\Delta t \to 0$ نحصل على :

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{p_o(t+\Delta t) - p_o(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}[-\lambda p_0(t)] + \ \lim_{\Delta t\to 0}[\,\mu p_1(t)] + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{O(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$p_0`(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

وكذلك العلاقة $(2-6)$ يمكن كتابتها بالشكل التالي :

$$\frac{p_n(t+\Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} =$$

$$= -(\lambda+\mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) + \frac{O(\Delta t)}{\Delta t} \quad ; n \geq 1$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{p_n(t+\Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}[-(\lambda+\mu)p_n(t)\,] \ + \lim_{\Delta t\to 0}[\lambda p_{n-1}(t)]$$

$$+\lim_{\Delta t\to 0}[\mu p_{n+1}(t)]+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{O(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$p_n`(t)=-(\lambda+\mu)p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)+\mu p_{n+1}(t)\quad ;n\geq 1$$

مجموع معادلات الفروق التفاضلية وبحل هذه المعادلات نحصل على $p_n(t)$

ولكن عندما $t\to\infty$ وعندما تكون $\lambda<\mu$

هنا تنعدم المشتقات التفاضلية $p_n`(t)$ وتصبح المعدلات السابقة بالشكل التالي :

$$0=-\lambda p_0+\mu p_1$$

$$0=-(\lambda+\mu)p_n+\lambda p_{n-1}+\mu p_{n+1}\qquad ;n\geq 1$$

وإذا فرضنا أن $\rho=(\frac{\lambda}{\mu})$

$$p_1=\rho p_0$$

$$p_{n+1}=(1+\rho)p_n-\rho p_{n-1}\qquad ;n\geq 1$$

ويمكننا هنا حل مجموعة هذه المعادلات التي تدعى معادلات النموذج الاحتمالي .

حل معادلات النموذج :

الطريقة الأولى : **طريقة التعويض المتتالي** .

$$p_1=\rho\, p_0$$

$$p_2=(1+\rho)p_1-\rho p_0=(1+\rho)\rho p_0-\rho p=\rho^2 p_0$$

$$p_3=(1+\rho)p_2-\rho p_1=(1+\rho)\rho^2 p_0-\rho.\rho p_0=\rho^3\, p_0$$

نجد أن :

$$p_{n-1}=\rho^{n-1}p_0$$

$$p_{n+1}=\rho^{n+1}p_0$$

$$p_n=\rho^n\, p_0$$

العلاقات صحيحة في حالة $n+1$ ، $n \geq 0$

نجمع الطرفين فنحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n$$

$$1 = p_0 \left(\frac{1}{1-\rho}\right)$$

$$p_0 = (1-\rho)$$

$$p_n = (1-\rho)\rho^n$$

وهو حل مجموعة المعادلات المطلوبة ..

انتهت المحاضرة الحادية والعشرون ..