معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثالثة

التحليل العقدي 1

المحاضرة 13

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 3rd year

2019/11/14

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

نظري

◄ المحاضرة: الثالثة عشر ◄ عنوان المحاضرة: خواص المتتاليات

مبرهنة :

للمتتالية العقدية المتقاربة وحيدة.

الإثبات:

لنفرض جدلاً أن للمتتالية $\{x_n\}$ متقاربة ولها نهايتان مختلفتان a', a عندئذٍ :

$$0 < |a - a'| = |a - z_n + z_n - a'| \leq |a - z_n| + |z_n - a'| \longmapsto 0$$

لنأخذ نهاية الطرفين لما $n \to \infty$

$$a - a' = \lim_{n\to\infty}(a - z_n) + \lim_{n\to\infty}(z_n - a') = 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = a'$$

أي أن النهاية وحيدة.

حسب مبرهنة الإحاطة: $a = a' \Leftarrow 0 < |a - a'| \leq 0$

وهذا تناقض بالتالي الفرض الجدلي خاطئ

$\Leftarrow$ النهاية وحيدة

مبرهنة :

اذا كانت $\{w_n\}$متتالية جزئية من متتالية $\{z_n\}$وكانت هاتان المتتاليتان متقاربتان فإن :

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} w_n$$

نتيجة :

اذا تقاربت متتاليتان جزئيتان من نهايتين مختلفتين فإن المتتالية الأصلية متاعدة .

نتيجة :

المتتالية المتأرجحة متباعدة

مثال :

جزئية من $\{z_n\}$ $\qquad \{|z_{4n}|\} = \{1\} \mapsto 1$

جزئية من $\{z_n\}$ $\qquad \{|z_{4n+2}|\} = \{-1\} \mapsto -1 \Leftarrow$ $\{z_n\}$ متباعدة

$\{Arg\ (i^n)\}$ متأرجحة بين القيم الأربعة التالية :

$$\left\{0\,,\frac{\pi}{2}\,,\pi\,,-\frac{\pi}{2}\,,0\,,\frac{\pi}{2}\,,\pi\,,-\frac{\pi}{2},0\,,\dots\dots\right\}$$

خواص نهاية متتالية

- مجموع متتاليتين متقاربتين متتالية متقاربة ونهايتها تساوي مجموع النهايتين العكس غير صحيح في الحالة العامة (قد توجد متتاليتين المجموع لهما متتالية متقاربة وهما غير متقاربتين)
- جداء متتاليتين متقاربتين متتالية متقاربة من جداء النهايتين والعكس غير صحيح في الحالة العامة (تقاربها كالمتتالية حقيقية $\Leftrightarrow$ تقارب)

مثال : $\left\{n\,.\frac{1}{n}\right\} = \{1\} \longrightarrow 1$(متقاربة)

جداء متتاليتين احداهما متقاربة والأخرى متباعدة لكن حاصل الجداء متقاربة

- حاصل قسمة متتاليتين متقاربتين (شرط أن تكون نهاية المقام غير معدوم)هي متتالية متقاربة ونهايتها تساوي نهاية البسط على نهاية لمقام

$$\frac{n+1 \to \infty}{n^2+1 \to \infty} \to 0$$

الا أن حاصل قسمتهما تسعى للصفر أي متقاربة .

المتتالية الهندسية العقدية

هي متتالية عقدية أي حد من حدودها ينتج عن سابقه بضربه بثابت عقدي نسمي هذا الثابت أساس المتتالية الهندسية .

أي أن حدها العام يأخذ الشكل التالي : $\{b\ a^n\}_{n\geq 0}$ a, b ثابتان عقديان

حيث : a : أساس المتتالية العقدية $a \neq 0$

b :الحد الأول للمتتالية الهندسية $b \neq 0$

<u>لندرس تقارب هذه المتتالية ونميز حالتين :</u>

1 $|a| = 1$ عندئذ تصبح حدود المتتالية (تعني النقاط التي تقع على الدائرة الواحدة)

$$b\ , b\ , b \ldots \ldots \ldots \ldots , b,.$$

$$|z_n| = |b1^n| = |b| \rightarrow |b|$$

اذا المتتالية متقاربة من حدها الأول b

2 $a \neq 1$ ، $|a| = 1$ عندئذ تكون المتتالية متباعدة

(وهذة يعني أما $a > 1$ أو $a < 1$)

الاثبات :

لنفرض جدلاً أن المتتالية متقاربة من w_0

$$z_{n+1} = ba^{n+1} = a(ba^n) = az_n$$

لنأخذ نهاية الطرفين

$$z_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w_0 \Longrightarrow a.z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.w_0$$

كما نلاحظ بأخذ نهاية الطرفين للعلاقة :

$$z_{n+1} = az_n$$

وأن $a.w_0 = w_0$ لأن النهاية وحيدة

$$a.w_0 - w_0 = 0 \Longrightarrow (a-1)w_0 = 0$$

$a - 1 \neq 0$ لان $w_0 = 0 \Longleftarrow$

حسب ما فرضنا

$$|z_n| = |ba^n| = |b||a^n| = |b| \rightarrow b \neq 0$$

وهذا يناقض كون $w_0 = 0$ ومنه $\{z_n = ba^n\}$متباعدة في هذه الحالة

- $|a| < 1$

تذكرة :

$* \lim a^n = 0$
$; |a| < 1$
$* \lim a^n = +\infty$
$; |a| > 1$

$$|z_n| = |ba^n| = |b|(|a|)^n \to 0 \Rightarrow |z_n| \to 0$$

ومنه $\{z_n\}$ متقاربة .

- $|a| > 1$

$$|z_n| = |ba^n| = |b|(|a|)^n \to \infty \Rightarrow |z_n| \to \infty$$

ومنه $\{z_n\}$ متباعدة .

تنويه :

اذا كان لدينا $s_n = \{a^n\}$ متتالية هندسية حقيقية نميز حالتين :

متقاربة من الصفر $|a| < 1 \Rightarrow s_n \longrightarrow 0$

متباعدة $|a| > 1 \implies \lim s_n = \infty$

◄تلخيص لما سبق

1- إذا كان أساس المتتالية الهندسية بالطويلة أصغر من الواحد فإن المتتالية الهندسية متقاربة وتسعى إلى الصفر

2- إذا كان طويلة أساس المتتالية الهندسية أكبر من الواحد فإن المتتالية الهندسية متباعدة وتسعى إلى ∞

3- إذا كان طويلة الأساس يساوي الواحد والأساس أيضاً يساوي الواحد فالمتتالية الهندسية متقاربة وتسعى إلى الحد الأول (b)

4- إذا كان طويلة الأساس يساوي الواحد والأساس لا يساوي الواحد فإن المتتالية تكون متباعدة

أمثلة :

- $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i\right)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$

$$\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{\sqrt{13}}{6} < 1$$

طويلة الأساس أصغر من الواحد $\Leftarrow$ متقاربة نهايتها تساوي الصفر

- $\{i^n\}$ متتالية هندسية إساسها i , $|i| = 1$ كما أن $i \neq 1$

$\Leftarrow$ متباعدة

- $\{(1+i)^n\}$ متتالية هندسية أساسها $|1+i| = \sqrt{2} > 1$

طويلة الأساس أكبر من الواحد $\Leftarrow$ متباعدة ونهايتها ∞

$\{z_i^n\}$ متتالية هندسية عقدية أساسها $i \neq 1$ أن طويلتها $|i| \neq 1$ فالمتتالية متباعدة

$\left\{\left(\frac{i}{2}\right)^n\right\} \Leftarrow \left\{\frac{i^n}{2^n}\right\}$ هندسية عقدية أساسها $\frac{i}{2}$

$$\left|\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

فالمتتالية متقاربة من الصفر

$\{(z_i)^n\}$

$$\{(z_i)^n\} = |i^n||z^n| = z^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

حيث متتالية هندسية حقيقية أساسها أكبر من الواحد وبالتالي المتتالية متباعدة

خاصة :

$$\frac{1}{z_n} \to \infty \quad \Leftarrow \quad z_n \to 0$$

$$\frac{1}{z_n} \to 0 \quad \Leftarrow \quad z_n \to \infty$$

$\left\{\left(\frac{1+i}{3}\right)^n\right\}$ متتالية هندسية عقدية أساسها $\frac{1+i}{3}$

$$\left|\frac{1+i}{3z}\right| = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$$

فهي متقاربة ونهايتها الصفر

المتتالية الكوشية :

نقول عن المتتالية $\{3_n\}$ أنها كوشية إذا تحقق الشرط

$$\forall \varepsilon > 0\ ;\ \exists N > 0\ ;\ \forall\ n, m > N\ ;\ |z_m - z3_n| < \varepsilon$$

انتهت المحاضرة