معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثانية

التحليل3

المحاضرة 1

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2019-2023

نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: الأولى ◄ عنوان المحاضرة: المتتاليات والجداءات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

1- المتتاليات
2- المتسلسلات
3- تقارب المتتالية والمتسلسلة
4- الجداءات غير المنتهية

المتتالية:

هي تابع مجموعة تعريفه مجموعة الاعداد الطبيعية N او اي مجموعة جزئية غير منتهية منها يرمز لها بـ $\{a_n\}_{n\geq 1}$ او $\{a_n\}_{n\in N}$ عناصرها: $a_0, a_1, a_2 \dots \dots , a_n, \dots \dots$ اذا كانت للمتتالية نهاية محددة فهي $lim_{n\to\infty} a_n = a$ ونقول انه يوجد نهاية للمتتالية a_n

تعريف: نقول عن المتتالية $\{a_n\}_{n\in N}$ انها متقاربة من عدد حقيقي a اذا وفقط اذا تحقق ما يلي

لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي N_ε بحيث $|a_n - a| < \varepsilon$ لاجل كل $n \geq N_\varepsilon$ كذلك يتحقق:

$$n \geq N_\varepsilon \quad \& \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

مثال: هل المتتالية متقاربة ام متباعدة؟؟!!

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$$

الحل: هي متتالية متقاربة لان $lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0 = a$

اذا وجد للمتتالية $\{a_n\}$ نهاية تكون المتتالية متقاربة والا تكون متباعدة..

حسب العريف:

مهما يكن $\varepsilon > 0$ يوجد $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$

بحيث يكون $n \in N^+ , |a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

يوجد $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ اذا وجدنا $n \geq N_\varepsilon$ $\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon$ والمتتالية متقاربة...

المتسلسلة: مثل

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

تكون متقاربة اذا كانت مجموعة متتاليات المجاميع الجزئية متقاربة

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

مثال: $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$

الحل: $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots$

$$S_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots$$

$$S_n \geq 1 + \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{8}\right) + 8\left(\frac{1}{6}\right) + \cdots + 2^{n-1}\left(\frac{1}{2^n}\right) + \cdots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots . + \frac{1}{2} \geq 1 + n\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$lim_{n\to\infty} S_n \geq lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{n}{2}\right) = \infty$$

اذا متتالية المجاميع الجزئية متباعدة و بالتالي المتسلسلة متباعدة☺

الجداءات غير المنتهية:

تعريف: لتكن $\{a_n\}_{n\in N}$ متتالية حقيقية حدودها $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ عندئذٍ نسمي الجداء غير المنتهي للقيمة

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1.a_2 \dots .a_n \dots$$

نأخذ متتالية الجداءات الجزئية: $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$

- نقول عن الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ انه متقارب اذا وفقط اذا كانت متتالية الجداءات الجزئية متقاربة اي $lim_{n\to\infty} p_n = lim_{n\to\infty} \prod^{n} a_k = p$
ونكتب $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = p$ حيث p عدد حقيقي $p \neq \pm\infty \quad \& \quad p \neq 0$
- نقول ان الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ انه متباعد اذا كانت $lim_{n\to\infty} p_n = p$ مباعدة اذا:

$$p = 0 \quad \& \quad p = \pm\infty$$

مثال: ادرس الجداء التالي واوجد قيمته في حال تقاربه:

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$$

الحل:

$$p_n = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{(k-1)(k+1)}{kk}\right) = \frac{1}{2}*\frac{3}{2}*\frac{4}{2}*\frac{3}{4}*\frac{5}{4}*\dots\frac{n-1}{n}*\frac{n+1}{n}$$

$$p_n = \frac{1}{2}*\frac{n+1}{n} \Longrightarrow lim_{n\to\infty} p_n = lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}*\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

اذا الجداء متقارب وقيمته $p = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$