معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثانية

البنى الجبرية1

المحاضرة 5

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2nd year

◄ دكتور المادة: فادي أبو حرب

◄ المحاضرة: الخامسة ◄ عنوان المحاضرة: علاقة الترتيب الجزئي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

فكرة الترتيب الجزئي – مبرهنات.

تعريف: ليكن $\mathcal{P}$ علاقة على المجموعة p ،نقول عن العلاقة انها علاقة ترتيب جزئي على المجموعة p اذا كانت العلاقة $\mathcal{P}$ انعكاسية ومتعدية وتخالفية.

يرمز عادةً لعلاقة الترتيب الجزئية بالرمز $\leq$

ونسمي الثنائية $(\mathcal{P},\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

مثال: مجموعة الاعداد الصحيحة Z مع علاقة $\leq$ المعرفة على الاعداد هي مجموعة مرتبة جزئيا، حيث يعطى هذا الترتيب بالشكل

$$\dots-3\leq-2\leq-1\leq0\leq1\leq2\leq3\dots$$

ملاحظة: يوجد أكثر من علاقة ترتيب جزئي على المجموعة الواحدة، فإن مجموعة الاعداد الصحيحة مرتبة وفق علاقة ترتيب غير مألوفة

$$0\leq1\leq2\leq3\dots\dots\leq-1\leq-2\leq-3..$$

مبرهنة:

ليكن $\leq$ علاقة انعكاسية ومتعدية على المجموعة p عندئذٍ:

1) **العلاقة $\mathcal{P}$ المعرفة على p بالشكل :** $\forall a,b\in p; a\mathcal{P}b \Leftrightarrow a\leq b\wedge b\leq a$

هي علاقة تكافؤ على p .

2) **العلاقة $\leq$ المعرفة على المجموعة $P/_{\mathcal{P}}$ بالشكل:** $\forall\,\overline{a},\overline{b}\in P/_{\mathcal{P}};\ \overline{a}\leq\overline{b}\Leftrightarrow a\leq b$

هي علاقة ترتيب جزئي على $^{P}/_{\mathcal{P}}$.

البرهان:

(اثبات ان $\mathcal{P}$ انعكاسية وتناظرية في المحاضرات القادمة)

برهان انها تخالفية: **ط1** $\forall\ \overline{a},\overline{b}\ \in\ ^{P}/_{\mathcal{P}}\ ;\ \left.\begin{matrix}\overline{a}\le\overline{b}\\ \overline{b}\le\overline{a}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\overline{a}=\overline{b}$

ط2 $\left.\begin{matrix}\overline{a}\le\overline{b}\ \Leftrightarrow a\le b\\ \overline{b}\le\overline{a}\ \Leftrightarrow b\le a\end{matrix}\right\} a\le b\wedge b\le a\Leftrightarrow a\mathcal{P}b$

$$a\in\overline{b}\ \Rightarrow\overline{a}=\overline{b}$$

- اثبات ان $\le$ هي علاقة ترتيب جزئي (قبل اثبات ذلك وكوننا نتعامل مع عناصر من $^{P}/_{\mathcal{P}}$ أي صفوف تكافؤ يجب ان نثبت اولاً ان العلاقة $\le$ معرفة جيداً) {*أي العلاقة لاتتغير بتغير ممثل صف التكافؤ*}
- ولاثبات ذلك يجب ان نثبت الشرط التالي:

$$\forall\ \overline{a},\overline{b},\overline{c}\in\ ^{P}/_{\mathcal{P}}\ ;\overline{a}=\overline{b}\ ,\overline{c}=\overline{d}$$

ولنفرض ان $\overline{a}\le\overline{c}$ وعلينا اثبات $\overline{b}\le\overline{d}$

الحل: لدينا $\overline{a}=\overline{b}\Rightarrow a\in\overline{a}=\overline{b}$

$a\le b\wedge b\le a$ اي $a\mathcal{P}b$

ايضاً $\overline{c}=\overline{d}\Rightarrow c\in\overline{c}=\overline{d}$

$c\le d\ \wedge d\le c$ اي $c\mathcal{P}d$

ولدينا من الفرض $\overline{a}\le\overline{c}$ وحسب الفرض بالمبرهنة $a\le c$

نجد ان $b\le a\le c$ ومنه $b\le c$

ومنه $b\le c\le d$ نجد ان $b\le d$

وحسب تعريف العلاقة $\le$ في الطلب 2 يكون $\overline{b}\le\overline{d}$

تعاريف هامة في المجموعات المرتبة جزئياً:

لتكن $(P,\le)$ مجموعة مرتبة جزئياً

1) نقول عن العنصر $a\in P$ انه عنصر اصغر في P اذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall x\in P\ ;a\le x$$

2) نقول عن العنصر $b \in P$ انه عنصر اكبر في P اذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall y \in P \,;\, y \leq b$$

3) نقول عن العنصر $d \in P$ انه عنصر اصغري في P اذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall z \in P \,;\, z \leq d \Rightarrow z = d$$

4) نقول عن العنصر $c \in P$ انه عنصر اعظمي في P اذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall u \in P; c \leq u \Rightarrow c = u$$

ملاحظة: ليس من الضروري ان تكون كل هذه العناصر موجودة في مجموعة ما مرتبة جزئياً.

مثال: مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ مرتبة جزئياً

وتحوي عنصر أصغر وهو 0 ، وهو عنصر أصغري أيضاً.

مبرهنة: (دون برهان)

لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً عندئذٍ:

1) العنصر الأصغر (الأكبر) في P يكون وحيداً في حال وجوده.
2) كل عنصر اصغر (اكبر) في P (في حال وجوده) يكون عنصراً اصغرياً (أي اعظمياً) في P

مبرهنة (دون برهان):

لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً فالشروط التالية متكافئة:

1) الشرط الاصغري: أي مجموعة جزئية غير خالية من P تحوي عنصر اصغرياً.
2) مبدأ الاستقراء: اذا كانت جميع العناصر الاصغرية في المجموعة P تتمتع بخاصة ما θ ، واذا كان تمتع جميع العناصر $x \in P$ المحققة للشرط $x \leq a$ يؤدي الى تمتع العنصر $a \in P$ بالخاصة θ فإن جميع العناصر في المجموعة P تتمتع بالخاصة θ
3) شرط انقطاع السلاسل المتناقصة: أي سلسلة متناقصة $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$.

من عناصر المجموعة P تنقطع أي يوجد دليل n من اجله $U_n = a.k$ وذلك اياً كان $k \geq n$ بمعنى $an = an + 1 = an + 2 \ldots \ldots$

مبرهنة:

يوجد في كل مجموعة جزئية وغير خالية من $\mathbb{N}$ عنصراً أصغر.

البرهان:

$$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$$

$$0 \in A$$

$$0 \notin A \neq \mathbb{N}$$

$$\exists K; K \leq a \ ; \ \forall a \in A$$

انتهت المحاضرة

إعداد: وئام النمس ☺ ولاء الأخضر ☺ أبرار الخالد