معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثانية

التحليل 3

المحاضرة 7

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2nd year

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: السابعة

◄ عنوان المحاضرة: المتتالية المتقاربة بانتظام

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- مبرهنتان و أمثلة

مبرهنة(5):

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع مستمرة على مجال I ولنفرض أن:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

عندئذٍ تكون القضيتين الآتيتين متكافئتين:

1) المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من الدالة $f(x)$ على I

2) $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$ حيث $M_n = \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|$

أي أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون المتتالية متقاربة بانتظام هو أن تكون هذه النهاية تساوي الصفر أي أن تكون نهاية الـ sup للفرق بين $f_n(x)$ و $f(x)$ من أجل كل قيمة x من I تساوي الصفر.

الإثبات:

$1 \Longleftarrow 2$ بفرض أن المتتالية متقاربة بانتظام على I عندئذٍ من أجل كل $\varepsilon > 0$ فإن $\frac{\varepsilon}{2} > 0$

و يوجد عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ و ذلك $n \geq N_0$, $\forall x \in I$

و هذا يعني أن المقدار $M_n = \sup|f_n(x) - f(x)|$ موجود و يحقق أن :

$$0 \leq M_n = \sup|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

و لما كان $\varepsilon > 0$ مقدار صغير بقدرٍ كافٍ نستطيع أن نكتب أن :

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \sup|f_n(x) - f(x)| = 0$$

بفرض **$1 \Leftarrow 2$**

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \sup|f_n(x) - f(x)| = 0$$

و بفرض $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون $|M_n - 0| = |M_n| < \varepsilon$

و ذلك عندما $n \geq N_0$ كذلك $M_n < \varepsilon$ و بالتالي :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq M_n < \varepsilon$$

و هذا يعطينا التقارب المنتظم لـ $f_n(x)$ من $f(x)$ على I .

تذكرة: الـ supremum هو أصغر حد أعلى (الحد الأعلى الأصغري).

نقول عن $b \in \mathbb{R}$ أنه أعلى حد أصغري للمجموعة A إذا تحقق الشرطان:

$$1)\ \forall x \in A \Rightarrow x \leq b$$

$$2)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists z \in A\ ; z > b - \varepsilon$$

مثال:

$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1} \qquad\qquad I = [0, \infty[$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx+1} = 0$$

فهي متقاربة نقطياً من التابع الصفري $f(x) = 0$

إذا كان الشرط $\lim_{n\to\infty} \sup|f_n(x) - f(x)| = 0 \quad ; \quad x \in [0, \infty[$ محقق تكون عندها المتتالية متقاربة بانتظام حسب المبرهنة(4) والآن لنرى إذا كان الشرط محقق أم لا.

$$\lim_{n\to\infty} \sup|f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup\left|\frac{1}{nx+1}\right| = 1 \neq 0$$

وبالتالي المتتالية غير متقاربة بانتظام لأن:

$$\lim_{n\to\infty} \sup|f_n(x) - f(x)| \neq 0$$

حيث:

$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1} = \begin{cases} 1 : x = 0 \\ \dfrac{1}{nx+1} : x > 0 \end{cases}$$

نتيجة : إذا لم يسعَ $\sup|f_n(x) - f(x)|$ إلى الصفر فالتقارب في حال وجوده غير منتظم.

مبرهنة(6): (اختبار كوشي):

متى تكون المتتالية متقاربة بانتظام حسب اختبار كوشي (المتتالية كوشية) ؟

تكون متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ المعرفة على المجال I متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على I إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

مهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ لأ $n > m > N_0$ ، $\forall x \in I$

الاثبات :

بفرض أن المتتالية $\{f_n(x)\}$ المعرفة على I متقاربة بانتظام من $f(x)$ على I :

بفرض $\varepsilon > 0$ عندها $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون :

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

و لأجل $m, n \geq N_0$ فإن:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

و بالعكس :

لأجل كل $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ لأجل $m \geq n \geq N_0$

و لدينا $x \in I$: $lim f_n(x) = f(x)$

لنثبت x فنحصل على متتالية عددية $\{f_n(x)\}$ كوشية في R أي هي متقاربة أي يوجد عدد تتقارب إليه

و بجعل x تأخذ جميع قيم المجال I نحصل على تابع تسعى إليه المتتالية التابعية على المجال I و ليكن $f(x)$.

بالتالي المتتالية $\{f_n(x)\}$ تتقارب من التابع $f(x)$ مهما كانت $x \in I$

لنثبت أن هذا التقارب منتظم على I :

لأجل $\varepsilon > 0$ ، يوجد عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون $\frac{\varepsilon}{2} > 0$:

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

نثبت n و نجعل $m \to \infty$ فنجد أن :

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad , \quad n \geq N_0$$

و بالتالي متقاربة بانتظام من $f(x)$ على I

مثال: المتتالية $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ ، $I = [0,1]$

أثبت أنها متقاربة بانتظام على I

$$\forall \varepsilon > 0$$

يوجد $N > \frac{2}{\varepsilon}$ بحيث يكون:

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \left|\frac{x^n}{n} - \frac{x^m}{m}\right| \leq \left|\frac{x^n}{n}\right| + \left|\frac{x^m}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N} < \varepsilon$$

$$\frac{2}{N} < \varepsilon \Rightarrow N > \frac{2}{\varepsilon}$$

فحسب المبرهنة الأخيرة تكون متقاربة بانتظام

مبرهنة (7) ديني :

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع مستمرة على $I = [a,b]$ حيث $a,b \in R$

و بفرض أن المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة نقطياً من $f(x)$ على I و بفرض $f(x)$ تابع مستمر على I
و أن $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ $\forall x \in I$, اعتباراً من قيمة معينة $n \geq N$ عندئذٍ تكون المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من $f(x)$ على I .

مثال:

ادرس تقارب المتتالية $f_n(x) = \frac{1}{n}sin(x)$ حيث $x \in I = [0,\pi]$

الحل :

حسب مبرهنة ديني : حدود متتالية التوابع لدينا مستمرة على I ،

نوجد تابع النهاية:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{sinx}{n} = 0 = f(x)$$

و التابع $f(x) = 0$ هو تابع مستمر على I و هو تقارب نقطيٌ على I و لكن بملاحظة أن :

$$f_n(x) = \frac{sinx}{n} \geq \frac{sinx}{n+1} = f_{n+1}(x)$$

يكون التقارب منتظماً حسب ديني