معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثالثة

التحليل التابعي1

المحاضرة 15

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 3rd year

نظري

◄ دكتور المادة: جمال مللي

◄ المحاضرة: الخامسة عشر   عنوان المحاضرة: الفضاءات المنظمة

تعريف تقارب متتالية في الفضاءات المنظمة :

تكون المتتالية $\{x_n\}_{n\in N^*}$ في فضاء منظم $X=(X,||.||)$ متقاربة إذا وجد عنصر x من X بحيث أن

$$\lim_{n\to\infty}||x_n-x||=0$$

ونكتب عندئذ $x_n\to x$ كما نسمي x نهاية المتتالية $\{x_n\}$.

ملاحظة :

إن تعريف التقارب في الفضاءات المنظمة يجب أن لا يتعارض مع تعريف التقارب في الفضاءات المترية والسبب في ذلك هو أن كل فضاء منظم هو فضاء متري .

يمكننا اعتبار أن الفضاءات المنظمة هي حالة خاصة من الفضاءات المترية .

- تعاملنا مع المتتاليات في الفضاءات المترية ولم نتعامل مع المتسلسلات لأنه ليس بالضرورة أ، يكون مفهوم الجمع معرف في الفضاءات المترية بينما الفضاءات المنظمة معرفة على الفضاءات المتجهية مزودة ببنية جبرية .

المتسلسلات في الفضاءات المنظمة :

نعلم أن المتسلسلة هي المجموع الجبري لعناصر المتتالية

ليكن لدينا المتتالية $(*)$: $x_1,x_2,x_3\ldots\ldots x_n,\ldots$

فإن المتسلسلة الناتجة عن هذه المتتالية هي : $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$

حيث x_nهي عناصر الفضاء المتجهي X .

فإذا كان المجموع منته نستطيع إيجاده بسهولةوتكون عندها المتسلسلة متقاربة ، أما في حال كان المجموع غير منته أو (غير موجود) هنا سنواجه مشكلة ولحلها نستخدم مفهوم تقارب المتسلسلة .

ولدراسة تقارب المتسلسلة

أولاً : نبني متتالية جديدة حدها العام مؤلف من مجموع أول n حداً من حدود المتتالية .

تدعى متتالية المجاميع الجزئية ونرمز لها $\{s_n\}_{n\epsilon N^*}$ حدودها كالتالي :

$$s_1 = x_1$$

$$s_2 = x_1 + x_2$$

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots .. + x_n$$

عندئذ تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ متقاربة إذا وفقط إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية لها $\{s_n\}_{n\epsilon N^*}$ متقاربة أي تحقق :

$$||s_n - s|| \to 0 \quad ; \quad n \to \infty$$

في هذه الحالة تكون نهاية $\{s_n\}$ موجودة ومحدودة ونرمز لها ب $\{s\}$ وتدعى مجموع هذهالمتسلسلة ويتحقق لدينا : $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s$

بعض خواص المتسلسلات :

1- مجموع متسلسلتين متقاربتين هو متسلسلة متقاربة .
2- مجموع متسلسلتين متباعدتين ليس بالضرورة أن يكون متسلسلة متباعدة .
3- حذف عدد منته من عناصر المتسلسلة لا يؤثر على تقاربها أو تباعدها .
4- ضرب متسلسلة بعدد حقيقي إيضاً لا يؤثر على تباعدها أو تقاربها .

التقارب بالإطلاق :

لتكن لدينا المتسلسلة (1) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ فإذا استبدلنا كل حد من حدود المتسلسلة بالنظيم لهذا الحد وكانت المتسلسلة الناتجة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| = ||x_1|| + ||x_2|| + \cdots .. + ||x_n|| + .. \quad (2)$$

متقاربة ندعو المتسلسلة (1) متقاربة بلإطلاق .

أما إذا كانت المتسلسلة (1) متقاربة و (2) ليست متقاربة فإننا نسمي هذا التقارب بالتقارب الشرطي .

مبرهنة هامة :ا

لشرط اللازم والكافي لتكون المتسلسلة متقاربة بلإطلاق في فضاء منظم X هو أن يكون X تاماً .

قاعدة شاودر :

في الفضاءات المنظمة نتعامل مع فضاءات شعاعية معرف عليها دالة النظيم أي مزودة ببنية جبرية فإننا نستطيع توظيف هذا والاستفادة من التقارب كبنية طبولوجية بتعريف شاودر .

كالتالي :

إذا حوى فضاء منظم X متتالية (e_n) حيث أنه يوجد لكل عنصر $x \epsilon X$ متتالية وحيدةمن الأعداد (a_n) حيث أن ((هذه المتتالية تنتمي للحقل المعرف عليه الفضاء المتجهي)) حيث تحقق :

$$x - \sum_{n=1}^{n} a_n e_n = ||x - (a_1 e_1 + \cdots \dots . + a_n e_n)|| \underset{n \to \infty}{\to} 0$$

فإن (e_n) تدعى قاعدة شاودر للفضاء X وتدعى عندئذ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{n} a_n e_n$ التي مجموعها x بمنشور x بالنسبة ل (e_n) ونكتب : $x = \sum_{n=1}^{n} a_n e_n$

الأمثلة :

1 – في الفضاء R^2 القاعدة القانونية $\{(0,1), (1,0)\}$ تمثل قاعدة شاودرحيث $\forall x = (\alpha, \beta) \epsilon R^2$ فإن x تحقق :

$$||x - (\alpha_1 e_1 + \cdots \dots . + \alpha_n e_n)|| \to 0$$

2 – الفضاء ℓ^p يمتلك قاعدة لشاودر هي (e_n) أي أن المتتالية التي حدها ذو الترتيب n يساوي (1) وكل حدودها الأخرى أصفاراً كالتالي :

$$e_1 = (1,0,0,0, \dots)$$

$$e_2 = (0,1,0,0, \dots .)$$

$$e_3 = (0,0,1,0,..)$$

حيث (e_n) هي عناصر من ℓ^p

مبرهنة الإتمام في الفضاء المنظم:

ليكن $X = (X, ||.||)$ فضاءاً منظماً عندئذ هناك فضاء لباناخ $X^\wedge$ وتطبيق ايزومتري A من X على فضاء جزئي W من $X^\wedge$ كثيف في $X^\wedge$

إن الفضاء $X^\wedge$ وحيد إذا غضضنا النظر عن الفضاءات الإيزومترية معه (بمعنى أنه إذا كان $X^\sim$ أي فضاء لباناخ يحوي فضاء كثيفاً w إيزومترياً مع x فإن الفضاءين $X^\wedge$ و $X^\sim$ ايزومتريان)

تمهيدية التراكيب الخطية :

ليكن لدينا X فضاء منظم ، ولتكن المجموعة $\{x_1, x_2, \ldots.., x_n\}$ جملة من الأشعة (منتهية) المستقلة خطياً "بغض النظر عن بعد الفضاء X "
بالتالي هذه المجموعة تولد فضاء جزئي منتهي الأبعاد كل عنصر منه يكتب على شكل تركيب خطي بدلالة هذه المجموعة
عندئذ يوجد $c > 0$ مستقل عن X بحيث :

$$(*) \quad ||\propto_1 x_1 + \cdots..+\propto_n x_n|| \geq c \sum_{i=1}^{n} |\propto_i|$$

بحيث أياً كانت الأعداد $\propto_1, \ldots, \propto_n$

البرهان :

- لنفرض أن $|\propto_1| + |\propto_2| + \cdots..+|\propto_n| = S$ واضح تماماً
إذا كان $S = 0$ فإن كلاً من $\propto_i = 0$ ذلك أياً كان $i = 1,2, \ldots, n$

بالتالي $(*)$ محققة أياً كان c .

- بفرض أن $\sum_{i=1}^{n} |\propto_i| = S \neq 0$
إذا فرضنا أن $\beta_i = \frac{\propto_i}{S}$ فإن $\sum_{i=1}^{n} |\beta_i| = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\propto_i|}{S} = 1$

إذا قسمنا طرفي $(*)$ على S وبما أنه $S > 0$ يمكننا إدخاله للنظيم ويكافئ لدينا

$$\left\|\frac{\alpha_1}{s}x_1 + \dots\dots\dots + \frac{\alpha_n}{s}x_n\right\| \geq c\sum_{i=1}^{n}\frac{|\alpha_i|}{s}$$

$$\|\beta_1 x_1 + \dots\dots\dots + \beta_n x_n\| \geq c\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|$$

$$(**)..\quad \|\beta_1 x_1 + \dots\dots + \beta_n x_n\| \geq c$$

يكفي البرهان على وجود عدد موجب c بحيث تكون $(**)$ محققة ، لنفرض مؤقتاً أن $(**)$ غير صحيحة أي أن :

$$\forall c\,;\quad \|\beta_1 x_1 + \cdots .. + \beta_n x_n\| < c$$

هذا يقتضي وجود متتالية من العناصر y_m بحيث :

$$y_m = \|\beta_1{}^m x_1 + \cdots .. + \beta_n{}^m x_n\| < c \quad ; \left(\sum_{i=1}^{n}|\beta_i| = 1\right)$$

بحيث أن $\|y_m\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

- لماذا المتتالية y_m موجودة ؟ (ممكن أن تكون المتتالية ثابتة)

بالتالي مهما c يوجد متتالية y_m بحيث $\|y_m\| =$ و $\|y_m\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

$\|\beta_1^m x_1, \dots\dots, \beta_n^m x_n\| < c$

نختار $c = {}^1/_m$ من أجل كل m نجد عنصر أي :

من أجل $m = 1$ يوجد $\beta_1^1 x_1 + \beta_2^1 x_2 + \dots\dots + \beta_n^1 x_n$

من أجل $m = 2$ يوجد $\beta_1^2 x_1 + \beta_2^2 x_2 + \dots\dots + \beta_n^2 x_n$

وبالتالي وجدت متتالية بحيث $0 \leq \|y_m\| < c = \frac{1}{m}$

عندما $m \to \infty$ فإن $c \to 0$ ومنه $\|y_m\| \to 0$

ولما كان $\sum_{i=1}^{n}|\beta_i^m| = 1$ ومنه $|\beta_i^m| \leq 1$ أياًكانت m وأياً كانت i فإن المتتالية:

$$(B_i^m) = \left(B_i^1, B_i^2, \dots\dots.\right)$$

نتجت عن ما يلي :

$$y_1 = \beta_1^1 x_1 + \beta_2^1 x_2 + \cdots + \beta_i^1 x_i + \cdots .. + \beta_n^1 x_n$$

$$y_2 = \beta_1^2 x_1 + \beta_2^2 x_2 + \ldots + \beta_i^2 x_i + \cdots .. + \beta_n^2 x_n$$

.

.

$$y_m = \beta_1^m x_1 + \beta_2^m x_2 + \cdots + \beta_i^m x_i + \cdots .. + \beta_n^m x_n$$

تكون المتتالية محدودة لدى تثبيت i (عند النظر لمتتالية الأعمدة من أجل الأعداد $(\beta_i^m$

اي أن $\left(\beta_i^m\right) = \left(\beta_i^{(1)}, \beta_i^{(2)}, \beta_i^{(3)}, \ldots\ldots, \beta_i^{(m)}, \ldots.\right)$ المتتالية العددية من $\mathbb{R}$

كل عنصر من عناصرها يحقق المحدودية وبالتالي المتتالية محدودة حسب مبرهنة (بولزانو فيرشتراس)
كل متتالية محدودة تحوي متتالية جزئية متقاربة فيها

مبرهنة بولزانو فيرشتراس تنص

على أن كل مجموعة غير فارغة من $\mathbb{R}$ محدودة وغير منتهية تملك نقطة جمع واحدة على الأقل .

بتطبيق هذه المبرهنة على المتتاليات :

بالتالي المتتالية لدينا محدودة وغير منتهية من العناصر فهي تملك نقطة وتجمع واحدة على الاقل

في كل متتالية عامود يتحقق هذا الشرط وبالتالي تملك نقطة تجمع يقابلها متتالية جزئية تتقارب إلى هذه النقطة أي لكل عامود هناك متتالية جزئية متقاربة .

هدفنا الحصول على متتالية جزئية من y_m تكون متقاربة :

المتتالية في العامود الأول $\left(\beta_1^m\right) = \left(\beta_1^{(1)}, \beta_1^{(2)}, \beta_1^{(3)}, \ldots\ldots, \beta_1^{(m)}, \ldots.\right)$ حسب مبرهنة بولزانو فيرشتراس تحوي متتالية جزئية متقاربة وليكن β_1 نهاية هذه الجزئية

نأخذ العناصر المقابلة لهذه المتتالية الجزئية المتقاربة مع مقابلاتها في العمود الثاني بالتالي تتشكل متتالية من العمود الثاني محدودة وغير منتهية وبالتالي تملك جزئية متقاربة بفرض أن β_2 نهاية هذه الجزئية. المتتالية في العمود الثاني اذا اخذنا ما يقابلها من المتتالية في العمود الأول ستكون المتتالية الجزئية من متتالية متقاربة فهي متقاربة .

نأخذ العناصر المقابلة للمتتالية الجزئية في العمود الثاني مع ما يقابلها في العمود الثالث ستتشكل متتالية محدودة غير منتهية حسب مبرهنة فايرشتراس تملك جزئية متقاربة

نتابع هذا العمل حتى العمود n وبأخذ ما يقابلها مع المتتاليات الأعمدة من العمود الأول حتى $n-1$ هي متتالية جزئية من متقاربة فهي متقاربة .

بالتالي يتشكل لدينا متتالية جزئية متقاربة من y_m لنرمز لها بـ y'_m بحيث أن كل عامود يتقارب من $\beta_i'^{(m)} \to \beta_i$

أي $y'_m = \beta_1'^{(m)} x_1, \beta_2'^{(m)} x_2 + \cdots . + \beta_n'^{(m)} x_n \to y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$

حيث $\sum_{i=1}^{n} |\beta_i| = 1$ وهذا يعني أنه لا يمكن ان تكون الأعداد β_i أصفار كلها بما أن $\{x_1, \dots \dots, x_n\}$ مستقلة خطياً فإن $y \neq 0$ ومن جهة أخرى $y'_m \longrightarrow y$

يقتضي أن $\|y'_m\| \longrightarrow \|y\|$ (استناداً إلى استمرار النظيم ولما كان $\|y_m\| \longrightarrow 0$ فرضاً و y'_m جزئية من y_m فلا بد أن يكون $\|y'_m\| \longrightarrow 0$

هذا يقتضي $\|y\| = 0$ ولكن هذا يناقض كون $y \neq 0$ وبالتالي قد أثبتنا صحة التمهيدية

((أعطى الدكتور هذه التمهيدية و أقر بأن غير مطلوبة بالامتحان لكن ضروري فهمها وعمل على شرحها))

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نصر الله، تقى إسماعيل، رولا الشيخ