معك نحو

التخرج

Syria Math Team

التحليل العقدي1

المحاضرة 23 (الأخيرة)

السنة الثالثة

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 3rd year

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة: الثالثة والعشرون (الأخيرة)

◄ عنوان المحاضرة: التوابع العقدية

سؤال:

هل التابع $g(z) = z + i\frac{1}{1-y}$ مساوٍ للتابع f في التمرين السابق ؟

الجواب : لا ، لهما نفس قاعدة الربط ولكن مجموعة تعريف g هي : $\mathbb{C}\backslash\{3 \;\; ; \;\; Im\, z = 1\}$

أي كل المستوى .

نهاية تابع عقدي ☺ (للاطلاع) :

ليكن f تابع عقدي معرف على مجموعة $A \subseteq \mathbb{C}$ ، $z_0 \in A'$ نقطة حدية لِـ A و L ثابت عقدي .

نقول أن لِـ f نهاية عند z_0 مساوياً لِـ n إذا تحقق:

$$\lim_{3 \to 3_0} f(z) = L$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \, ; \exists \delta(z, z_0) \, ; \, \forall z \in A \cap D(z, z_0)\backslash\{z_0\} : |f(z) - L| < \varepsilon$$

في حال عدم وجود عدد مثل يحقق الشرط السابق فإننا نقول إن النهاية غير موجودة

مبرهنة: ((تُستخدَم غالباً لإثبات عدم وجود نهاية للتابع عند z_0))

ليكن $f : A \to \mathbb{C}$ تابع عقدي ، $z_0 \in A'$ و L ثابت عقدي .

$$\forall \{z_n\} \subseteq A\backslash\{z_0\} \cap z_n \to z_0 \Leftrightarrow : f(z_n) \to L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

ملاحظة:

لو استطعنا أن نجد متتاليتين من عناصر المجموعة A كل منهما تسعى إلى z_0 **إلا أن** متتالية الصور للأولى تسعى إلى نهاية مختلفة عن نهاية متتالية الصور للثانية ، عندئذٍ : ليس للتابع f نهاية عند z_0 .

تمرين :

هل للتابع $f(z)=\frac{\bar{z}}{z}$ نهاية عند الصفر ؟

إن هذا التابع غير معرف عند $z=0$

وإن $f(z)=\bar{z}$ يقرن كل عدد بمرافقه فهو معرف على $\mathbb{C}$

إن مجموعة تعريف f هي : $A=\mathbb{C}^*$.

ولنأخذ متتاليتين :

$$1)\ z_n=\frac{1}{n}\in\mathbb{C}^*\quad ;\quad z_n=0\notin A\ \Rightarrow z=0\ \in A$$

$$2)\ w_n=\frac{i}{n}\in\mathbb{C}^*\quad ;\quad w_n\to 0$$

حيث أن متتالية الصور للأولى : $f(z_n)=\frac{\overline{\left(\frac{1}{n}\right)}}{\frac{1}{n}}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1\quad\to 1$

متتالية الصور للثانية : $f(w_n)=\frac{\overline{\left(\frac{i}{n}\right)}}{\frac{1}{n}}=\frac{\frac{-i}{n}}{\frac{1}{n}}=-1\quad\to -1$

نلاحظ أن $-1\neq 1$ أي النهايتين غير متساويتين ومنه ليس لـِ f نهاية عند الصفر.

مبرهنة: ليكن f تابع معرف على A

$$f:A\to\mathbb{C}$$

$z_0=x_0+iy_0$ و $L=\alpha+i\beta$ ثابت عقدي.

إن $f=u+iv$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \alpha$$

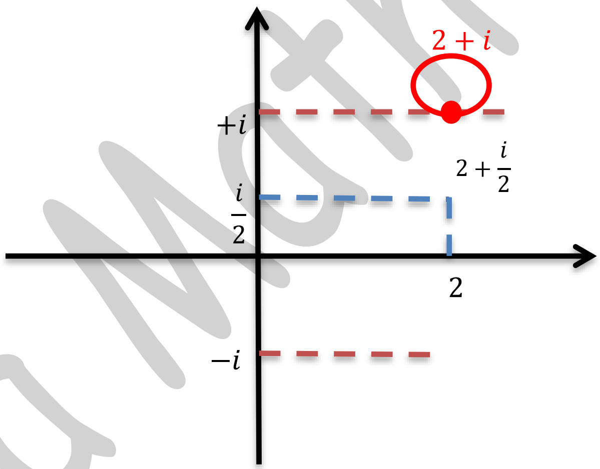
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \beta$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{z\to z_0} f(z) = L$$

ملاحظة : عدم وجود النهاية لـ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)$ و $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$ يقتضي عدم وجود النهاية لـ f عند z_0

تمرين : هل للتابع $f(z) = x.y\int_0^{\infty} e^{-xt}\,dt + i\sum_{n=0}^{\infty} y^n$ نهاية عند $\frac{i}{2}$ ؟ وعند $2+\frac{1}{2}i$ ؟ $2+i$

الحل :



إن $\frac{i}{2}$ هي نقطة تجمع لـ f ولكنها لا تنتمي لِـ A .

$2+\frac{1}{2}i$ هي نقطة من المجموعة وهي نقطة تجمع <<أي نقطة داخلية في مجموعة وهي نقطة تجمع للمجموعة>> .

وجدنا أن :

$$f(z) = y + i\frac{1}{1-y} \quad ; \ \forall z \in A$$

$$u(x,y) = y \quad , \quad v(x,y) = \frac{1}{1-y}$$

$$\lim_{(x,y)\to\left(0,\frac{1}{2}\right)} u(x,y) = \lim_{(x,y)\to\left(0,\frac{1}{2}\right)} y = \frac{1}{2}$$

ملاحظة : أي كثير حدود حقيقي لمتحولين حقيقين معرف ومستمر وقابل للاشتقاق الجزئي بالنسبة لمتحولين x,yمن أي مرتبة وعدد غير منته من المرات عند A^2

$$\lim_{(x,y)\to\left(0,\frac{1}{2}\right)} v(x,y) = \lim_{(x,y)\to\left(0,\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

تابع كسري لمتحولين (كثير حدود لمتحولين على كثير حدود لمتحولين)) مستمر على R^2عدا الثنائيات التي تعدم المقام

مستمر عندها لأنها ليست بالمجموعة

$$\Rightarrow \lim_{3\to\frac{i}{2}} f(3) = \lim_{(x,y)\to(0,\frac{1}{2})} u(x,y) + i \lim_{(x,y)\to(0,\frac{1}{2})} v(x,y)$$

$$\Rightarrow \lim_{3\to\frac{i}{2}} f(3) = \frac{1}{2} + 2i$$

أي نقطة داخلة في مجموعة هي نقطة تجمع لها

فالنهاية موجودة .

$2+\frac{1}{2}i$ داخلية فيA ومنه $2+\frac{1}{2}i \in A^{`}$

$$\lim_{(x,y)\to\left(2,\frac{1}{2}\right)} u(x,y) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to\left(2,\frac{1}{2}\right)} v(x,y) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

أما لو كانت النقطة : $2+i$

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} u(x,y) = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} v(x,y) = +\infty$$

إن $(2+i)$ هي نقطة تجمع لأنه إذا أخذنا أي جوار ستكون حاوياً لعدد غير منته من نقاط A .

فإن $\lim_{(x,y)\to(0,\frac{1}{2})} v(x,y) = \frac{1}{1-1} = \infty$

غير موجودة $\Rightarrow \lim_{3\to 2+i} f(z)$

استمرار تابع عقدي :

مبرهنة :

$$f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

نقول أن f مستمر عند z_0 إذا وفقط إذا تحقق :

1) $z_0 \in A$

2) $\lim_{z\to z_0} f(z)$ موجودة

3) $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

تمرين :

هل التابع $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ مستمر عند الصفر

f غير مستمر عند الصفر لأنه غير معرف عند الصفر

تمرين :

$$g(z) = \to \frac{\bar{z}}{z} \qquad ; z \neq 0$$

$$\to i \qquad ; \quad z = 0$$

غير مستمر عند الصفر لأن: $\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z})$

غير موجود كما رأينا سابقا والتابع غير مستمر عندها .

تمرين :

هل التابع مستمر عند $z = 2i$

$$f(z) = \to \frac{z-2i}{iz^2+3z-2i} \quad ; z \neq 2i$$

$$\to \; -1 \quad ; z = 2i$$

الحل :

$$\lim_{z\to 2i} f(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{z-2i}{iz^2+3z-2i} = -4i + 6i - 2i:$$

نحلل المقام لجداء قوسين نقسم البسط على المقام تكون النهاية موجوة

تمرين :

هل التابع $f(z) = \bar{z}$ مستمر على C

الحل :

$$= x + i\,(-y)$$

$$u = x \quad , \quad v = -y$$

كلاهما كثير حدود لمتحولين وكلاهما مستمر على R^2

$$R^2 \cap R^2 = R^2$$

استمرار f يكافئ استمرارها عند جزئها الحقيقي والتخيلي .

انتهت المحاضرة الأخيرة

إعداد: رشا القرصة ، تقى إسماعيل ، خديجة الرفاعي