2019-12-10

نظري

◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: السابعة عشرة   عنوان المحاضرة: حل مسائل

مسألة من الكتاب صفحة (101) لم تحلها الدكتورة

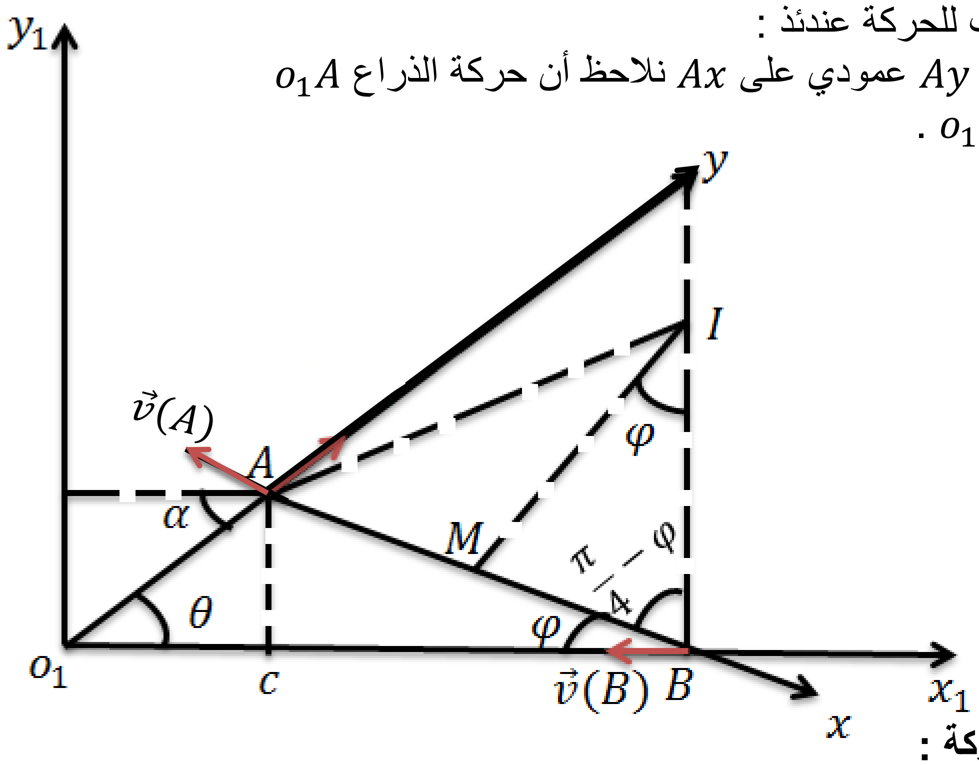
ذراع (o_1A) طوله (a) يدور في مستوي ثابت بسرعة زاوية ثابتة (ω_1) حول النقطة الثابتة (o_1) ، إن (AB) ذراع طوله $(2a)$ مرتبط مفصليا في (A) (أي بالذراع o_1A) وتنزلق نهايته (B) على المستقيم الثابت (o_1x_1)، والمطلوب :

1- معادلات حركة الذراع (AB).

2- تعيين المركز الآني للدوران للذراع (AB) ثم تعيين القاعدة والمتدحرج .

3- تعيين سرعة وتسارع النقطة (B) .

الحل :



نختار النقطة (A) قطب للحركة عندئذ :

Ax هو الذراع AB و Ay عمودي على Ax نلاحظ أن حركة الذراع o_1A حركة دائرية مركزها o_1 .

1- تعيين معادلات الحركة :

النقطة o_1 ، وبالتالي معادلات النقطة A في الجملة الثابتة هي :

$$A(x_A, y_A) = \begin{cases} x_A = a.\cos\theta \\ y_A = a.\sin\theta \end{cases}$$

ولكن حسب الفرض في نص المسألة $\theta' = \omega_1 \implies \theta = \omega_1.t + \theta_0$

من شروط البدء $t = 0$ و $\theta = 0$ نجد أن $\theta_0 = 0$ وبالتالي : $\theta = \omega_1 t$

وبالتالي فإن :

$$x_A = a.\cos\omega_1 t \quad , \quad y_A = a.\sin\omega_1 t$$

في المثلث ACo_1 يكون : $Ac = a.\sin\theta$ وفي المثلث ACB يكون : $Ac = 2a.\sin\varphi$

وبالتالي بالمطابقة :

$$a.\sin\theta = 2a.\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\sin\theta}{2} \Rightarrow \varphi = arc\sin\left(\frac{\sin\theta}{2}\right) \quad ..(*)$$

$$\Rightarrow \varphi = arc\sin\left(\frac{\sin\omega_1 t}{2}\right)$$

وبالتالي معادلات الحركة هي :

$$x_A = a.\cos\omega_1 t \quad , y_A = a.\sin\omega_1 t \quad , \varphi = arc\sin\left(\frac{\sin\omega_1 t}{2}\right)$$

2- تعيين المركز الآني للدوران :

أولاً : بفرض إحداثيات المركز الآني للدوران في الجملة الثابتة هي $I(x_1, y_1)$

((سنقوم بتعيين المركز الآني هندسيا ويمكن تعينه تحليلياً))

A تتحرك بشكل دائرة و B تتحرك على نفس المستقيم .

وبالتالي نأخذ مماس الدائرة على A ، ونأخذ العمود المماس في النقطة A ،ألا وهي النظيم .

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}(A)}{\omega^2} \quad ; \omega = \varphi'$$

$$x_1 = \overrightarrow{o_1 B} = \overrightarrow{o_1 c} + \overrightarrow{cB}$$

نلاحظ أن : $o_1 c = a.\cos\theta$ كما أن : $cB = 2a.\cos\varphi \overset{(*)\text{ من}}{=} 2a.\sqrt{1 - \sin^2\varphi}$

$$\Rightarrow cB = 2a.\sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{4}} = a.\sqrt{4 - \sin^2\theta}$$

$$x_1 = a.\cos\theta + a.\sqrt{4 - \sin^2\theta} = a.\cos\omega_1 t + a\sqrt{4 - \sin^2\omega_1 t}$$

$$y_1 = BI = o_1 B.\tan\theta = x_1.\tan\theta$$

$$y_1 = \left(a.\cos\theta + a.\sqrt{4 - \sin^2\theta}\right).\tan\theta$$

$$y_1 = a.\sin\omega_1 t + a\sqrt{4 - \sin^2\omega_1 t}.\tan\omega_1 t$$

وبالتالي احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة الثابتة هي :

$$I\left(a.\cos\omega_1 t + a\sqrt{4 - \sin^2\omega_1 t}, a.\sin\omega_1 t + a\sqrt{4 - \sin^2\omega_1 t}.\tan\omega_1 t\right)$$

وهذه الاحداثيات تعين المعادلات الوسيطة للقاعدة .

لتعيين إحداثيات المركز الآني للدوران في الجملة المتماسكة ، وبفرض احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة المتماسكة هي : $I\big(x(I), y(I)\big)$.

وبالتالي نقوم بما يلي :

$$x(I) = AM = AB - MB = 2a - IB.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$x(I) = 2a - y_1.\sin\varphi = 2a - y_1.\frac{\sin\theta}{2}$$

$$x(I) = 2a - \left(a.\sin\theta + a\sqrt{4 - \sin^2\theta}\,.\tan\theta\right).\frac{\sin\theta}{2}$$

$$x(I) = 2a - \frac{a}{2}\left(\sin^2\theta - \sqrt{4 - \sin^2\theta}\,.\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$x(I) = 2a - \frac{a}{2}\left(\sin^2\omega_1 t - \sqrt{4 - \sin^2\omega_1 t}\,.\frac{\sin^2\omega_1 t}{\cos\omega_1 t}\right)\;..(\#)$$

$$y(I) = IM = IB.\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = y_1.\cos\varphi$$

$$y(I) = \left(a.\sin\theta + a\sqrt{4 - \sin^2\theta}\,.\tan\theta\right)\frac{\sqrt{4 - \sin^2\theta}}{2}$$

$$y(I) = \frac{a}{2}\left(\sin\theta\,.\sqrt{4 - \sin^2\theta} + (4 - \sin^2\theta).\tan\theta\right)$$

$$y(I) = \frac{a}{2}\left(\sin\omega_1 t\,.\sqrt{4 - \sin^2\omega_1 t} + (4 - \sin^2\omega_1 t).\tan\omega_1 t\right)..(\#\#)$$

إن $(\#)$ و $(\#\#)$ هي احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة المتماسكة
و هذه الاحداثيات تعين المعادلات الوسيطة للمتدحرج .

3- تعيين سرعة وتسارع النقطة (B) :

عبارة شعاع الموضع للنقطة (B) في الجملة الثابتة هو :

$$\overrightarrow{o_1B} = x_B\vec{\imath_1} + y_B\vec{\jmath_1} = x_1\vec{\imath_1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{o_1B} = \left(a.\cos\omega_1 t + a\sqrt{4 - \sin^2\omega_1 t}\right)\vec{\imath_1}$$

بالاشتقاق نحصل على السرعة :

$$\vec{V}(\mathrm{B}) = -a\left(\omega_1.\sin\omega_1 t + \frac{\omega_1.\sin\omega_1 t\,.\cos\omega_1 t}{\sqrt{4 - \sin^2\omega_1 t}}\right)\vec{\imath_1}$$

بالاشتقاق مرة ثانية نحصل على التسارع :

$$\vec{\Gamma}(B) = -a\omega_1^2.\cos\omega_1 t + a\frac{\left(-\omega_1^2\,(\cos^2\omega_1 t - \sin^2\omega_1 t).\sqrt{4 - \sin^2\omega_1 t}\right)}{4 - \sin^2\omega_1 t}$$

$$-a\left(\frac{\left(\frac{\omega_1.\sin\omega_1 t\,.\cos\omega_1 t}{\sqrt{4-\sin^2\omega_1 t}}\right)(\omega_1.\sin\omega_1 t.\cos\omega_1 t)}{4-\sin^2\omega_1 t}\right)$$

مسألة دورات

يتدحرج مخروط دوراني S رأسه الثابت o ، زاويته الرأسية $\frac{\pi}{4}$ ، نصف قطر قاعدته a دون انزلاق على السطح الخارجي لمخروط دوراني ثابت S_1 ومشترك معه بالرأس o

المطلوب :

1) عين معادلات حركة S علماً أن نصف قطر المخروط S تساوي a نصف قطر قاعدة S وأن القيمة العددية لسرعة مركز القاعدة هي $|v(A)=4a|$

2) عين سرعة نقطة B من محيط القاعدة S_1 في النقطة التي تقع فيها B على محور المخروط S_1 .

الحل

بما أن المخروط S يتدحرج على المخروط الثابت بنصف قاعدته وزاوية المخروط الثابت هي فقط $\frac{\pi}{4}$

فتكون الزاوية $\theta=\frac{\pi}{2}$ ، ونعلم ان شعاع الدوران يعطى بالعلاقة :

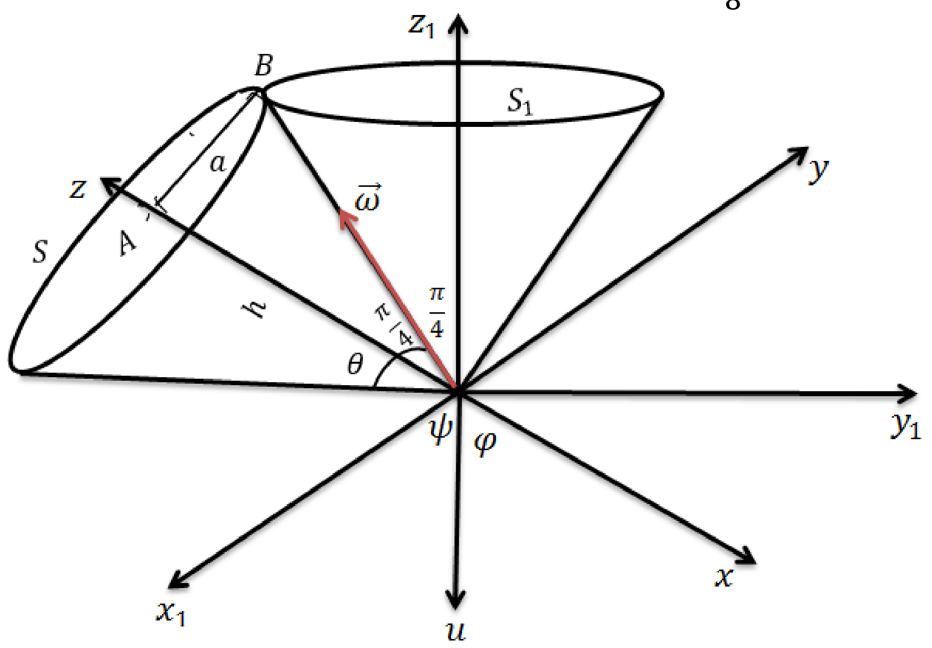
$$\vec{\omega}=\psi'\overrightarrow{k_1}+\theta'\overrightarrow{u_1}+\varphi'\vec{k}\Longrightarrow\vec{\omega}=\psi'\overrightarrow{k_1}+\varphi'\vec{k}$$

وسرعة النقطة A هي : $\vec{v}(A)=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{oA}$ وبأخذ القيمة العدية نجد :

$$|\vec{v}(A)|=|\vec{\omega}|.\left|\overrightarrow{oA}\right|.\sin\left(\vec{\omega},\overrightarrow{oA}\right)\Longrightarrow|\vec{v}(A)|=|\vec{\omega}|.\left|\overrightarrow{oA}\right|.sin\frac{\pi}{8}\ldots.(1)$$

من نص المسألة القيمة العددية لسرعة مركز القاعدة هي $4a$ أي أن $\left|\vec{V}(A)\right|=4a$

ومنه نجد بالتعويض في (1) نجد : $4a = |\vec{\omega}|.h.sin\frac{\pi}{8}$ ......$(*)$.



لحساب الارتفاع h لدينا المقطع من الرسمة السابقة :

ومنه يوجد لدينا المقابل و المجاور للزاوية $\frac{\pi}{8}$ ، ولدينا $\boxed{tan\,\alpha = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}}$

ومنه نجد : $tan\frac{\pi}{8} = \frac{a}{h} \Rightarrow h = \frac{a}{tan\frac{\pi}{8}}$ وبالتالي بتعويض h بالعلاقة $(*)$ نجد :

$$4a = |\vec{\omega}|.\frac{a}{tan\frac{\pi}{8}}.sin\frac{\pi}{8} \Rightarrow |\vec{\omega}| = 4.\frac{tan\frac{\pi}{8}}{sin\frac{\pi}{8}}$$

$$\boxed{\Rightarrow |\vec{\omega}| = \frac{4}{\cos\frac{\pi}{8}}}$$

بالعودة لعلاقة السرعة :

$$\vec{v}(A) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oA}$$

ولدينا $\overrightarrow{oA}$ محمول على شعاع الواحدة $\vec{k}$ (لأنه موجود على محور المخروط) ، وطوله h بالتالي :

$$\vec{V}(A) = (\psi'\overrightarrow{k_1} + \varphi'\vec{k}) \wedge (h\vec{k})$$

بتوزيع الجداء الخارجي على المجموع وسحب الثوابت خارج جداء الأشعة ، نجد :

$$\vec{V}(A) = h\psi'(\overrightarrow{k_1} \wedge \vec{k}) + h\varphi'(\vec{k} \wedge \vec{k})$$

وبما أن الجداء الخارجي لشعاعين متوازيين أو على نفس الحامل معدوم ومنه $(\vec{k} \wedge \vec{k}) = 0$

ولدينا : $\left|\overrightarrow{k_1} \wedge \vec{k}\right| = |\vec{k}|.\left|\vec{k}_1\right|.sin\frac{\pi}{2} = 1\ ; \quad |\vec{k}| = \left|\vec{k}_1\right| = 1, sin\frac{\pi}{2} = 1$

ومنه:

$$\left|\vec{V}(A)\right| = h\psi'$$

بتعويض h بقيمتها وأخذ القيمة العددية للسرعة نجد :

$$4a = \frac{a}{tan\frac{\pi}{8}}\psi' \Rightarrow \quad 4 = \psi' \Rightarrow \psi' = \frac{4}{tan\frac{\pi}{8}}$$

بالمكاملة :

$$\psi = \frac{4}{tan\frac{\pi}{8}}t + \psi_0$$

من شروط البدء $\psi = 0$،$t = 0$ ، ومنه نجد $\psi_0 = 0$ وبالتالي

$$\boxed{\psi = \frac{4}{cos\frac{\pi}{8}}t} \ldots\ldots\ldots (2)$$

لإيجاد φ من العلاقة :

$$\vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \varphi'\,\vec{k} \xrightarrow{\text{بالتربيع}} \omega^2 = (\psi'\overrightarrow{k_1} + \varphi'\,\vec{k})^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \psi'^2 + \varphi'^2 + 2\left(\psi'\overrightarrow{k_1} + \varphi'\,\vec{k}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{cos\frac{\pi}{8}}\right)^2 = \left(\frac{4}{cos\frac{\pi}{8}}\right)^2 + \varphi'^2 + 2.\frac{4}{cos\frac{\pi}{8}}.cos\frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow 0 = 8\varphi' + \varphi'^2 \Rightarrow \varphi' = (8 + \varphi') = 0$$

إما $\varphi' = 0$ ومنه $\varphi = c$ ((ولايمكن أن تكون الزاوية ثابتة)) مرفوضة

أو $\varphi' = -8$ ومنه $\varphi' = -8$ ومنه $\varphi = -8t + c$ ومنه $\boxed{\varphi = -8t}$

2) تعيين سرعة النقطة B

$$\vec{v}(B) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oB} = (\psi'\overrightarrow{k_1} + \varphi'\vec{k}) \wedge (oB\vec{k})$$

بتوزيع الجداء الخارجي على المجموع وسحب الثوابت خارج جداء الأشعة ، نجد :

$$\vec{V}(B) = (oB\vec{k}) \wedge \psi'\overrightarrow{k_1} + (oB\vec{k})\varphi'(\vec{k} \wedge \vec{k})$$

وبما أن الجداء الخارجي لشعاعين متوازيين أو على نفس الحامل معدوم ومنه $\left(\vec{k} \wedge \vec{k}\right) = 0$

$$\Rightarrow \vec{V}(B) = (oB\overrightarrow{k_1}) \wedge \varphi'\vec{k}$$

وبما أننا نريد تعيين السرعة على القاعدة فيجب تحويل $\vec{k}$ حسب مصفوفات التحويل نجد :

$$\vec{k} = \cos\theta\,\overrightarrow{v_1} - \sin\theta\,\overrightarrow{k_1}$$

ويجب تحويل لـ $\overrightarrow{v_1}$ إلى الجملة الثابتة (القاعدة) فتصبح $\overrightarrow{v_1} = (-\sin\psi\,\overrightarrow{\imath_1} + \cos\psi\,\overrightarrow{J_1})$

$$\overrightarrow{v_1} = \cos\theta\,\overrightarrow{v_1} - \sin\theta\,\overrightarrow{k_1}$$

وبالتعويض في $\vec{k}$ نجد :

$$\vec{k} = sin\frac{\pi}{8}.\sin\psi\,\overrightarrow{\imath_1} - sin\frac{\pi}{8}.\cos\psi\,\overrightarrow{J_1} + cos\frac{\pi}{8}\overrightarrow{k_1}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(B) = \left(oB\overrightarrow{k_1}\right) \wedge \left(\varphi'\,sin\frac{\pi}{8}.\sin\psi\,\overrightarrow{\imath_1} - \varphi'\,sin\frac{\pi}{8}.\cos\psi\,\overrightarrow{J_1} + \varphi'\,cos\frac{\pi}{8}\overrightarrow{k_1}\right)$$