معك نحو

التخرج

Syria Math Team

نظرية الاحتمالات

السنة الثالثة

المحاضرة 14

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 3rd year

نظري

◄ دكتور المادة: أحمد الغصين

◄ المحاضرة: الرابعة عشر

◄ عنوان المحاضرة: الأشعة العشوائية

التوزيعات الاحتمالية المستمرة :

إذا كان x , y متحولين عشوائيين مستمرين فإن الاحتمال يكون منتشر بكثافة معينة فوق المستوي $\mathbb{R}^2$ فإن وجدت دالة كثافة $f(x,y)$ تحقق الشروط التالية :

- $f(x,y) \geq 0$ لجميع قيم x,y .
-

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\,dy = 1$$

فيقال أن لـ $x\,,y$ توزيع احتمالي مشترك دالة كثافته الاحتمالية المشتركة هي $f(x,y)$ وفي هذه الحالة يكون احتمال أن تقع (x,y) في منطقة A هو :

$$p(A) = p[\,(X\,,Y\,) \in A\,] = \int\int f(x,y)dx\,dy$$

دالة التوزيع التراكمية المشتركة في هذه الحالة كالتالي :

$$F(a,b) = p[\,X\ \leq a\ ,Y \leq b\,] = \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} f(x,y)dx\,dy$$

مثال : إذا كان $X\,,Y$ متغيرين عشوائيين مستمرين دالة كثافتهما الاحتمالية المشتركة

$$f(x,y) = cxy \qquad , \quad c \geq 0 \text{ مقدار ثابت}$$

$0 \leq x \leq y \leq 1$ ، صفر خلاف ذلك .

1– أوجد قيمة c

2- احسب $F\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

الحل :

1- هذه الدالة موجبة من أجل جميع قيم $X\,,Y$

$$f(x,y) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\,dy = c\int_{0}^{1} x\,dx \int_{x}^{1} y\,dy$$

$$= c\int_{0}^{1} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x}^{1} dx$$

$$= \frac{c}{2}\int_{0}^{1} x\,(1-x^2)dx$$

$$= \frac{c}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \frac{c}{8} = 1 \implies c = 8$$

2- بشكل عام إن دالة التوزيع التراكمية للمتغيرين X, Y هي :

$$F(a,b) = p(X \leq a\;, Y\; \leq b)$$

$$= 8\int_{0}^{a} x\,dx\int_{x}^{b} y\,dy = \frac{8}{2}\int_{0}^{a} x\,(b^2-x^2)dx$$

$$= \frac{8}{2}\left[b^2\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{a} = 2a^2b^2 - a^4$$

ومنه :

$$F\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{7}{162}$$

دوماً نأخذ ال Y بدلالة X أي يجب أن يكون التكامل الثاني متعلق بالتكامل الأول .

ـ التوزيعات الاحتمالية الهاشمية :

إذا كان $X\ ,Y$ متحولين عشوائيين لهما توزيع مشترك من النوع المنقطع

الدالة الاحتمالية المنقطعة الهاشمية للمتحول X هي :

$$f(x) = \sum_{y} f(x,y)$$

والدالة الاحتمالية الهاشمية للمتحول Y :

$$f_y(Y) = \sum_{x} f(x,y)$$

أما في حالة التوزيعات المستمرة فإن :

$$F(a) = F(a,\infty) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy$$

نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتحول X أي :

$$f(x) = F`(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

وبالنسبة للمتحول Y :

$$f(Y) = F`(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

مثال : إذا كانت الدالة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين $X\ ,Y$ معرفة

$$f(x,y) = q^2\,p^{y-2}$$

$$x = 1,2,\dots y-1$$

$$y = 2,3,4\dots$$

$$q = 1 - p \qquad , 0 \leq p \leq 1$$

فأوجد الدالة الاحتمالية الهامشية لكل من X , Y ؟

الحل :

$$f_X(x) = \sum_y f(x, y) = q^2 \sum_{y=x+1}^{\infty} p^{y-2}$$

$$= q^2 \frac{p^{x-1}}{1-p} = qp^{x-1}$$

$$f(x) = q\, p^{x-1} \qquad ; x = 1, 2, \ldots$$

وبالمثل :

$$f_y(y) = \sum_x f(X, Y) = q^2 \sum_{x=1}^{y-1} p^{y-2}$$

$$= (Y - 1)\, q^2\, p^{y-2}$$

إذا :

$$f_y(Y) = (Y - 1)\, q^2\, p^{y-2} \qquad ; \quad y = 2, 3, 4, ..$$

التوزيعات الاحتمالية المشروطة :

إذا كان (X, Y) متحولاً عشوائياً ثنائياً منقطع . دالته الاحتمالية المشروطة للمتحول Y بشرط $X = xi$ هي :

$$f(Y \backslash X = xi) = \frac{f(xi, y)}{f(xi)}$$

$f(x)$ هي الدالة الاحتمالية الهامشية للمتحول X $\qquad f(xi) > 0$

الدالة الاحتمالية المشروطة للمتحول X بشرط $Y = yi$ هي :

$$f(X \backslash Y = yi) = \frac{f(x, yi)}{f(yi)}$$

و $f(yi) > 0$ و $f(y)$ هي الدالة الاحتمالية الهامشية للمتحول Y

ملاحظة : إن الدوال الاحتمالية المشروطة تحقق جميع شروط التوزيع الاحتمالي العادي فمثلاً :

- $f(X\backslash Y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} \geq 0$

-

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(X\backslash Y)dx = \frac{1}{f(Y)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

$$\frac{f(y)}{f(y)} = 1$$

مثال : إذا كانت الدالة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين X, Y معطاة كما في الجدول التالي :

$Y\backslash X$	1	2	3
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
4	0	$\frac{1}{3}$	0

أوجد الدالة الهاشمية لكل من X, Y و :

$$p(X = 2\,|Y = 2)\ ,p\,(X = 1\ |Y < 4\,), p(X = 2\ or\ Y = 4)$$

الحل :

بجمع الاحتمالات أفقياً و شاقولياً نحصل على

الدالة الاحتمالية الهامشية للمتغير X هي :

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

والدالة الاحتمالية الهاشمية للمتغير Y هي :

Y	2	3	4
$f(Y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$p(X=2\,|Y=2)=\frac{p(x=2\,,y=2)}{p(y=2)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

$$p(X=1\,|Y<4)=\frac{p(x=1\,,y<4)}{p(y<4)}$$

$$=\frac{p(X=1|y=2)\,p(X=1\,|Y=3)}{p(Y=2)+p(Y=3)}$$

$$=\frac{\frac{1}{12}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3}{12}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{8}$$

$$p\,(X=2\;or\;Y=4)=$$

$$p\,(X=2)+p(Y=4)-p(X=2\,,Y=4)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

$p(X=2\,,Y=2)$ من الجدول المعطى بالسؤال

$f(X=2)$ من الدالة الاحتمالية الهامشية

استقلال المتحولات العشوائية :

تعريف : يقال عن شعاع (X, Y) أنهما مستقلان بالتبادل

إذ تحقق الشرط : $f(x,y) = f(x).f(y)$

دالة التوزيع التراكمية :

$$F(x,y) = F(X).F(Y)$$

بالتالي إن :

$$f(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}F(X)\frac{\partial}{\partial y}F(y) = f(x).f(y)$$

تعريف :

هي المتحولان y, x مستقلان حيث :

$$f(x,y) = \frac{\lambda^{x+y}\,e^{-2\lambda}}{x!\,y!}\ ;\quad \begin{matrix} x = 0,1,2,\dots \\ y = 0,1,2,\dots \end{matrix}$$

أولاً نكتب الدوال الهامشية لـ x ثم y ونأخذ المجموع

$$f(x) = \sum_y \frac{\lambda^{x+y}\,e^{-2\lambda}}{x!\,y!} = \frac{\lambda^x\,e^{-2\lambda}}{x!}\underbrace{\sum_y \frac{\lambda^y}{y!}}_{=e^{\lambda}}$$

$$f_x(x).f_y(y) = f(x,y) \quad \Leftarrow \begin{cases} f_x(x) = \dfrac{\lambda^x\,e^{-\lambda}}{x!} \\ f_y(y) = \dfrac{\lambda^y\,e^{-\lambda}}{y!} \end{cases}$$

أي أن المتحولين x, y مستقلان

انتهت المحاضرة الرابعة عشرة