معك نحو

التخرج

Syria Math Team

نظرية الاحتمالات

السنة الثالثة

المحاضرة 17

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 3rd year

◄ دكتور المادة: أحمد الغصين

◄ المحاضرة: السابعة عشر ◄ عنوان المحاضرة: توزيعات ثنائية

بعض التوزيعات ثنائية المتغيرات :

1– توزيع ثلاثي الحدود :

يقال عن متحول عشوائي ثنائي منقطع (X,Y) إنه يتبع توزيع ثلاثي الحدود بمعالم $n\,, p_1, p_2$ إذا كانت دالته الاحتمالية المشتركة من الشكل :

$$f(x,y)=\frac{n!}{x!\,y!\,(n-x-y)!}\,{p_1}^{x}\,{p_2}^{y}\,{p_3}^{n-x-y}$$

حيث n عدد صحيح موجب و $X,Y\ \geq 0\ ,\ X+Y\leq n$

$$p_1+p_2+p_3=1\quad ,\quad 0\leq p_1\leq 1$$

إن هذه الدالة كما هو واضح هي دال موجبة و

$$\sum_{x}\sum_{y} f(X,Y)=1$$

لأن :

$$\sum_{x}\sum_{y} f(X,Y)=\sum_{x=0}^{n}\sum_{y=0}^{n-x}\frac{n!}{x!\,y!\,(n-x-y)!}\,{p_1}^{x}\,{p_2}^{y}\,{p_3}^{n-x-y}$$

$$=\sum_{x=0}^{n}\frac{n!\,{p_1}^{x}}{x!\,(n-x)!}\sum_{y=0}^{n-x}\frac{(n-x)!\,{p_1}^{x}}{y!\,(n-x-y)!}\,{p_2}^{y}\,{p_3}^{n-x-y}$$

$$=\sum_{x=0}^{n}\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,{p_1}^{x}(p_2+p_3)^{n}=(p_1+p_2+p_3)^{n}=1$$

نتيجة :

من تعريف الدالة الاحتمالية المشتركة $f(x,y)$ يمكن أن نوجد الدالة الاحتمالية الهامشية لكل من المتحولين $X\,,Y$ وكذلك الدالة الاحتمالية المشروطة $f(X|Y)$ كما يلي :

$$f_Y\,(x) = \sum_{y=0}^{n-x} \frac{n!}{x!\,y!\,(n-x-y)!}\, {p_1}^x\, {p_2}^y\, {p_3}^{n-x-y}$$

$$= \frac{n!\,{p_1}^x}{x!\,(n-x)!} \sum_{x=0}^{n-x} \frac{(n-x)!}{y!\,(n-x-y)!} {p_2}^y\, {p_3}^{n-x-y}$$

$$= \frac{n!\,{p_1}^x}{x!\,(n-x)!}(p+p)^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, {p_1}^x(1-p_1)^{n-x}$$

وهنا نلاحظ أن الدالة الاحتمالية الهامشية للمتحول x يتبع توزيع ذي الحدين بمعالم $p_{\,1}, n$ وبنفس الطريقة نجد :

$$f(y) = \frac{n!}{y!\,(n-y)!}\, {p_2}^y(1-p_2)^{n-y}$$

ونلاحظ هنا أيضاً أن :

$$f(x,y) \neq f(x).f(y)$$

أي أن $x\,,\; y$ متحولين مستقلين .

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{(n-y)!}{x!\,(n-y-x)!}\, {p_1}^x \frac{{p_3}^{n-y-x}}{(1-p_2)^{n-y}}$$

$$= \frac{(n-y)!}{x!\,(n-y-x)!}\left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)^x . \left(\frac{p_3}{1-p_2}\right)^{n-y-x}$$

$$= \frac{(n-y)!}{x!\,(n-y-x)!}\left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)^x . \left(1-\frac{p_1}{1-p_2}\right)^{n-y-x}$$

وهذه الدالة تتبع أيضاً توزيع ذي الحدين بمعالم $(n-y), (p_1/(1-p_2))$

2– التوزيع الطبيعي ثنائي المتغيرات :

يقال عن شعاع عشوائي (x,y) مستمر أنه يتبع توزيعاً طبيعياً ثنائي بمعالم $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية المشتركة من الشكل :

$$f(x,y) = \frac{e^{-\frac{q}{2}}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-p^2}} \quad ; -\infty \leq x,y \leq \infty$$

حيث :

$$q = \frac{1}{1-p^2}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

و $\sigma_1 > 0 \quad , \quad \sigma_2 > 0$

إن دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية للمتحول x هي $x \sim N(\mu_1 , {\sigma_1}^2)$

كما أن الدالة الاحتمالية للمتحول y هي $y \sim N(\mu_2 , {\sigma_2}^2)$

أما دالة الكثافة المشروطة للمتحول x فهي :

$$x|y \sim \left[\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2), {\sigma_1}^2(1-p^2)\right]$$

ودالة الكثافة المشروطة للمتحول y هي :

$$y|x \sim \left[\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1), {\sigma_2}^2(1-p^2)\right]$$

كما أن دالة توليد العزوم للتوزيع الطبيعي الثنائي المستمر هي الدالة :

$$M(t,u) = e \times p[\mu_1 t + \mu_2 u + \left(\frac{1}{2}\right)({\sigma_1}^2 t^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 tu + {\sigma_2}^2 u^2)\ ]$$

ومن هذه الدالة يمكن أن نحدد العزوم المختلفة ومعامل الارتباط بالشكل التالي :

$$\frac{\partial M(t,v)}{\partial t} = (\mu_1 + {\sigma_1}^2 t + \rho\sigma_1\sigma_2 u)\, M(t,u)$$

$$\frac{\partial^2 M(t,v)}{\partial t\, \partial u} = (\mu_1 + {\sigma_1}^2 t + \rho\sigma_1\sigma_2 u)(\mu_2 + {\sigma_2}^2 t + \rho\sigma_1\sigma_2 t)\, M(t,u) + \rho\sigma_1\sigma_2 M(t,u)$$

$$E(x,y) = \left[\frac{\partial^2 M(t,u)}{\partial t\,\partial u}\right]_{t=u=0} = \mu_1\mu_2 + \rho\sigma_1\sigma_2$$

$$cov(x,y) = E(x,y) - E(x)E(y) = \rho\sigma_1\sigma_2$$

$$\rho(x,y) = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2} = \rho$$

وهنا نلاحظ أنه إذا كانت $\rho = 0$ فإن :

$$M(t,u) = M(t,o)M(o,u)$$

الفصل الرابع :

الدوال في المتحولات العشوائية ستقدم التوزيع الاحتمالي بمتحول عشوائي ، ونناقش باختصار الحالتين التاليتين :

الحالة الأولى :

المتحولات العشوائية المنقطعة إذا كان x متحول عشوائي منقطع وكانت $y = g(x)$ فإن المتحول y يكون متحولاً عشوائياً منقطعاً أيضاً ، فإذا كان x يأخذ القيم المعدودة $x_1 , x_2, \ldots, x_i , ..$ فمن المؤكد أن تأخذ y القيم :

$$y_1 = g(x_1)\,, y_2 = g(x_2)\,, \ldots, y_i = g(x_i), \ldots$$

إن بعض قيم y ربما تكون متساوية ولكن هذا لا يمنع من أن هذه القيم قابلة للعد أي معدودة ..

ـ وبفرض أن الدالة الاحتمالية للمتحول X هي $f(x) = p(X = x)$ معلومة .

والمطلوب إيجاد الدالة الاحتمالية للمتحول $Y = g(X)$ ولتكن $h(Y) = p(Y = y)$

وذلك بمعرفة الدالة الاحتمالية للمتحول X وهنا يوجد حالتان :

أ)إذا كانت $Y = g(X)$ دالة وحيدة القيمة بمعنى أن لكل قيمة من قيم المتحول Y يوجد قيمة وحيدة للمتحول X في هذه الحالة يكون :

$$h(Y) = p(Y = y) = p[g(X) = y] = p[X = x]$$

$$= f(x) \qquad (1-4)$$

مثال :

إذا كانت الدالة الاحتمالية للمتغير x :

x :	-1	0	1
$f(x)$:	0.25	0.40	0.35

وكانت $Y = 3x + 1$ ، أوجد الدالة الاحتمالية للمتغير Y .

الحل :

إن الدالة $Y = 3x + 1$ دالة وحيدة القيمة و القيم الممكنة للمتغير Y هي $-2,1,4$

واحتمالات هذه القيم هي :

$$h(-2) = p[3x + 1 = -2] = p[X = -1] = 0.25$$

$$h(1) = p[3x + 1 = 1] = p[X = 0] = 0.40$$

$$h(4) = p[3x + 1 = 4] = p[X = 1] = 0.35$$

فإن الدالة الاحتمالية للمتغير Y هي :

Y :	-2	1	4
$f(Y)$:	0.25	0.40	0.35

ب)إذا كانت $Y = g(X)$ دالة متعددة القيم بمعنى أنه يناظر بعض قيم Y أكثر من قيمة للمتحول X فإذا كانت القيمة Y_i يناظرها القيم x_{i_1} , x_{i_2} , ... فهذا يعني أنه لجميع قيم r يكون : $Y_i = g(x_{i_r})$ وهنا يكون :

$$f(Y) = p[Y = y] = f(x_{i_1}) + f(x_{i_2}) + .. \qquad (2-4)$$

ويمكن كتابة المعادلتين $(1-4), (2-4)$ بالصيغة العامة :

$$h(Y_i) = p(Y = Y_i) = \sum_{g(x)=y_i} f(x) \qquad (3-4)$$

مثال : إذا كانت الدالة الاحتمالية للمتغير X :

$$\begin{array}{lccc} x & : & -1 & 0 & 1 \\ f(x) & : & 0.25 & 0.40 & 0.35 \end{array}$$

وكانت $Y = 1 \times 1$ ، أوجد الدالة الاحتمالية للمتغير Y ؟؟

الحل :

إن القيم الممكنة للمتغير Y هي $0 , 1$ واحتمالاتها هي :

$$h(0) = p[Y = 0] = \sum_{|x|=0} f(x) = \sum_{x=0} f(x) = f(0) = 0.40$$

$$h(1) = p[Y = 1] = \sum_{|x|=1} f(x) = \sum_{x=-1\,,1} f(x) = f(1) + f(-1)$$

$$= 0.25 + 0.35 = 0.60$$

بناءً على ذلك فإن الدالة الاحتمالية للمتغير Y هي :

$$\begin{array}{lcc} Y : & 0 & 1 \\ f(Y) : & 0.4 & 0.6 \end{array}$$

أحياناً يكون X متحولاً عشوائياً مستمراً دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$ بينما يكون Y متحولاً منقطعاً ولكي نحصل على الدالة الاحتمالية للمتحول Y فإننا بكل بساطة نحدد الحادثة المكافئة في R_X التي تناظر القيم المختلفة للمتحول Y وعلى العموم إذا كانت الحادثة $(Y = y!)$ في R_Y تكافئها الحادثة A مثلاً في R_x

يكون :

$$h(Y_i) = p[Y = Y_i] = p[x \in A] = \int f(x)dx$$

فمثلاً نفرض أن X تأخذ جميع القيم الحقيقية $-\infty \leq X \leq \infty$ وأن Y معرفة بالشكل التالي :

$$Y = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$h(0) = p(Y = 0) = p(X < 0) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx$$

فيكون :

$$h(1) = p(Y = 1) = p(X \geq 0) = \int_{0}^{\infty} f(x)dx$$

مثال : إذا كان X متحولاً عشوائياً مستمراً دالته الكثافة الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$f(x) = \frac{1}{4} \quad ; -1 \leq x \leq 3$$

وكانت :

$$Y = \begin{cases} -1 & ; \ x < 0 \\ 1 & ; \ x \geq 0 \end{cases}$$

أوجد الدالة الاحتمالية للمتحول Y

الحل :

$$h(-1) = p(Y = -1) = p[X < 0] = \int_{-1}^{0} \frac{1}{4} \, dx = \frac{1}{4}$$

$$h(1) = p(Y = 1) = p[X \geq 0] = \int_{0}^{3} \frac{1}{4} \, dx = \frac{3}{4}$$

انتهت المحاضرة السابعة عشرة ..