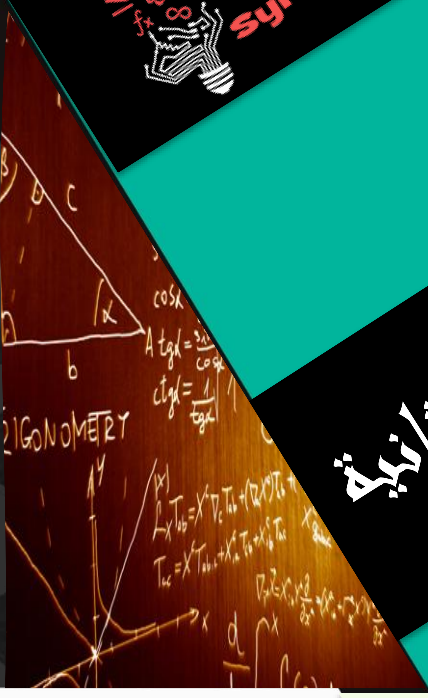
معك نحو

التخرج

Syria Math Team



السنة الثانية

التحليل3

المحاضرة 9و10

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية - جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف - واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2nd year

نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: التاسعة والعاشرة

◄ عنوان المحاضرة: متسلسلات التوابع ومتسلسلات القوى

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- أمثلة

2- مبرهنات

3-متسلسلات القوى

مثال

أوجد منطقة تقارب المتسلسلة وادرس تقاربها $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ المعرفة على $\mathbb{R}$

نأخذ متتالية مجاميعها الجزئية ثم نرى مجال التقارب.

$$s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n - x^{n+1}$$

من أجل $n = 1$ تعطينا $x - x^2$

من أجل $n = 2$ تعطينا $x^2 - x^3$

من أجل $n = n - 1$ تعطينا $x^{n-1} - x^n$

أي:

$$s_n(x) = (x - x^2) + (x^2 - x^3) + \cdots + (x^{n-1} - x^n) + (x^n - x^{n+1})$$

$$\Rightarrow s_n(x) = x - x^{n+1}$$

والآن نأخذ نهاية متتالية المجاميع الجزئية:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} (x - x^{n+1}) = x - \lim_{n\to\infty} x^{n+1}$$

$$= \begin{cases} 0 & ; \quad x = 1 \\ 0 & ; \quad x = 0 \\ x & ; \quad |x| < 1 \\ -\infty & ; \quad x > 1 \\ \text{غير موجود} & ; \quad x \leq -1 \end{cases}$$

منطقة تقارب هذه المتسلسلة هي $|x| < 1$ و $x = 1$ أو $]-1,1]$

تابع المجموع هو:

$$s(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x = 1 \\ x & ; \quad |x| < 1 \end{cases}$$

تابع غير مستمر لأنه يعاني من انقطاع عند النقطة $x = 1$ على هذا المجال وبالتالي المتسلسلة متقاربة نقطياً على المجال $]-1,1]$ من $s(x)$

نتيجة:

إذا كان الحد العام للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ يسعى للتابع الصفري بشكل منتظم والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة فليس من الضروري أن تكون المتسلسلة متقاربة بانتظام على I

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$$

هل المتسلسلة متقاربة بانتظام على $I =]-1,1[$؟

الحل:

نأخذ متتالية المجاميع الجزئية:

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k - k^{k+1}$$

$$= x - x^2 + (x^2 - x^3) + (x^3 - x^4) + \cdots + (x^n - x^{n+1})$$

بالاختصار نجد:

$$s_n(x) = x - x^{n+1}$$

نأخذ نهاية متتالية المجاميع الجزئية:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty}(x - x^{n+1}) = x = s(x)$$

لأن x^n موجودة ما بين الـ (-1) و 1 ولدينا x أصغر من 1^n عندما n تسعى للانهاية يصبح المقدار يساوي الصفر.

المتسلسلة متقاربة من $s(x)$ على I

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty}(x - x^{n+1}) = x \quad ; \quad x \in]-1,1[$$

الحد العام للمتسلسلة يسعى للتابع الصفري.

$$\lim_{n\to\infty} x^n(1-x) = 0 = f(x)$$

لأن x موجودة ما بين الـ (-1) و 1 ولدينا x أصغر من 1^n عندما n تسعى للانهاية يصبح المقدار يساوي الصفر.

لنثبت التقارب بانتظام للحد العام:

نأخذ نهاية الـ sup لفرق $f_n(x)$ عن $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \sup|f_n(x) - f(x)|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup|x^n(1-x) - 0|$$

شرح بسيط: عندما الـ x تنتمي للمجال، أكبر قيمة للـ sup هي الواحد ونهاية $\frac{n}{n+1}$ عندما n تسعى للانهاية هي الواحد وبالتالي $\frac{n}{n+1}$ هي الأنسب لكي نختاره وهذا المقدار دائماً يبقى أصغر من الواحد بينما لو أخذنا $\frac{n+1}{n}$ فهذا المقدار أكبر من الواحد وبالتالي لا يمكن أخذه.

أي: $\frac{n}{n+1} \in]-1,1[$ وهي أكبر قيمة نهايتها تسعى للواحد.

$$\sup x = \frac{n}{n+1} \in]-1,1[$$

بالتعويض بدل كل $\sup x$ بـ $\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\sup|x^n(1-x)| = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\right) = 1(1-1) = 0$$

وبالتالي تقارب الحد العام هو تقارب منتظم للتابع الصفري على $]-1,1[$

لنبرهن أن المتسلسلة متقاربة لكن ليس بالضرورة أن تكون متقاربة بانتظام

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; ; \;\; \exists\, N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} - 1$$

$$n > N$$

$$|s_n(x) - s(x)| = |x - x^{n+1} - x| = |x|^{n+1} < \varepsilon$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$\ln|x|^{n+1} < \ln \varepsilon$$

$$(n+1)\ln x < \ln \varepsilon$$

نقسم على $\ln x$ ولأنه مقدار سالب نقلب إشارة المتراجحة:

$$(n+1) > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$$

$$\Rightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} - 1$$

ومنه $N(\varepsilon, x)$ أي N تابع لـ ε و x وشرط التقارب المنتظم أن يكون N تابع لـ ε فقط وبالتالي فالتقارب غير منتظم.

مبرهنة:

الشرط اللازم والكافي لتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ بانتظام على المجال I هو:

$0 < \varepsilon$ يوجد عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون:

$$|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_m(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right|<\varepsilon$$

عندما $m>n>0$ ومن أجل جميع قيم x من I.

مثال:

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^2)$ معرفة على $I=[-p,p]$ حيث $0<p<1$

ليكن $\varepsilon>0$ عندئذٍ يوجد عدد طبيعي بحيث يكون $N>\frac{(\ln\varepsilon-\ln(1+P))}{\ln p}$

$$m>n>N_0 \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right|$$

$$=|(x^n-x^{n+2})+(x^{n+1}-x^{n+3})+(x^{n+2}-x^{n+4})+\cdots+(x^{m-1}-x^{m+1}) + (x^m-x^{m+2})|$$

بالاختصار نجد أن:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right|=|x^n+x^{n+1}-(x^{m+1}+x^{m+2})|$$

$$=|x^n(1+x)-x^{m+1}(1+x)|$$

نخرج الـ $x^n(1+x)$ عامل مشترك فيكون الطرف الأول يساوي الواحد أما الطرف الثاني

$$\frac{x^{m+1}(1+x)}{x^n(1+x)}=x^{m+1}.x^{-n}=x^{m-n+1}$$

وبالتالي:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right|=|x^n(1+x)(1-x^{m-n+1})|$$

بفرض الـ $m-n+1$ هو α بحيث $|1-x^\alpha|<1$ ومنه:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| = |x^n(1+x)(1-x^{m-n+1})| \le |x^n(1+x)| \le p^n(1+p) < \varepsilon$$

عوضنا بدل كل x بـ (p)

ومنه $p^n < \frac{\varepsilon}{1+p}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$\ln p^n < \ln \frac{\varepsilon}{1+p}$$

$$n \ln p < \ln \varepsilon - \ln(1+p)$$

$$n > \frac{\ln \varepsilon - \ln(1+P)}{\ln p}$$

ومنه المتسلسلة متقاربة بانتظام حسب المبرهنة

مبرهنة (اختبار فايرشتراس)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على المجال I وإذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلة عددية متقاربة، ذات حدود موجبة بحيث يكون $|f_n(x)| \le b_n$

مهما كانت n من N و x من I عندئذٍ:

1) تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بإطلاق على المجال I

2) تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على المجال I

مثال:

المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

معرفة على $\mathbb{R}$

الحل:

$\forall\, n \in \mathbb{N}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة لأنها متسلسلة ريمانية من الشكل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ حيث $p = 2 > 1$

ومنه المتسلسلة متقاربة.

ومنه المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ متقاربة بإطلاق وحسب اختبار فايرشتراس هي متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$.

تذكرة: نقول عن المتسلسلة العددية الكيفية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ أنها متقاربة بإطلاق إذا تقاربت المتسلسلة المؤلفة من القيم المطلقة لحدودها أي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ متقاربة } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ متقاربة}$$

ملاحظة: إذا كانت المتسلسلة متقاربة بإطلاق فهي متقاربة.

مبرهنة(اختبار آبل)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على I وبرفض حدها العام يكتب بالشكل:

$$f_n(x) = g_n(x).\, h_n(x)$$

حيث:

1) متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ متقاربة بانتظام على I

2) متتالية التوابع $\{h_n(x)\}$ متناقصة وذات حدود موجبة ومحدودة بعدد ثابت

وذلك $\forall\, x\,, n \in I$

عندئذٍ تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^2x^2}$$

أدرس تقاربها بانتظام على I.

$$I = [0, p] \qquad\qquad 0 < p < 1$$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^2x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n . \frac{1}{1+n^2x^2} = g_n(x).h_n(x)$$

وإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ متقاربة بانتظام على I لأن:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,; \exists\, N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln p}$$

بحيث يكون $|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n < \varepsilon$

بأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$\ln x^n < \ln \varepsilon$$

$$n \ln x < \ln \varepsilon$$

نقسم على $\ln x$ وهو مقدار سالب لأنه محصور بين الصفر والواحد لذلك نقلب إشارة المتراجحة:

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$$

نأخذ $N = \max\left(1\,, \frac{\ln \varepsilon}{\ln p}\right)$ ومن أجل كل $n \geq N$

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} > N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln p}$$

وبالتالي المتتالية متقاربة بانتظام على $I = [0, p]$ لأن N متعلقة فقط بـ ε

والمتتالية $\left\{\frac{1}{1+n^2x^2}\right\}$ متناقصة على I لأن $\frac{1}{1+(n+1)^2x^2} > \frac{1}{1+n^2x^2}$ وهي محدودة

$$\left|\frac{1}{1+n^2x^2}\right| \leq 1$$

لأنه مهما كانت x بين $[0,p]$ فهي مقدار كبير وبما أنها تقع في المقام فيصبح الكسر أصغر من الواحد وعندما تأخذ الـ x قيمة صفر عندها يصبح الكسر يساوي الواحد وبالتالي هي محدودة من الأعلى.

حسب مبرهنة آبل تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+n^2x^2}$ متقاربة بانتظام على $I=[0,p]$

مبرهنة: (اختبار ديريكليه)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على I وبفرض الحد العام يكتب بالشكل:

$$f_n(x) = g_n(x).h_n(x)$$

حيث:

1) متتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ محدودة بعدد ثابت وذلك أياً كان n وأياً كان x من I أي $\forall\, x\,, n \in I$

2) متتالية التوابع $\{h_n(x)\}$ متناقصة وذات حدود موجبة وهي متقاربة بانتظام على I من التابع الصفري $f(x)$ على I عندئذٍ:

تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I

مثال: هل المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n}$$

معرفة على $I=]0,1[$ ؟

الحل: إن

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n}.\frac{1}{n}=g_n(x).h_n(x)$$

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n$ متتالية مجاميعها الجزئية:

$$s_n(x)=(-x)+(-x)^2+(-x)^3+\cdots+(-x)^n=(-x)\frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)}$$

$$=(-x)\frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}=\frac{-x-(-x)^{n+2}}{1+x}$$

لأنها هندسية.

تذكرة: متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية:

$$s_n(x)=\alpha\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

حيث α هو الحد الول و r هو الأساس.

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{-x-(-x)^{n+2}}{1+x}=\frac{-x}{1+x}=s(x)$$

حيث نهاية $(-x)^{n+2}$ عندما n تسعى للانهاية هي الصفر.

$$\Rightarrow s(x)=\frac{-x}{1+x} \qquad \text{و} \qquad x\in]0,1[$$

$$|s_n(x)|=\left|\frac{-x-(-x)^{n+2}}{1+x}\right|\le|x|+|x|^{n+2}<2$$

ملاحظة: 1) القيمة المطلقة لفرق حدين هي القيمة المطلقة للحد الأول+القيمة المطلقة للحد الثاني حسب خواص القيمة المطلقة.

2) بما أن $\sup(I)=1$ على المجال $]0,1[$ ومنه المقدار يصبح أصغر تماماً من 2.

ملاحظة: الحد الأعلى أي sup ليس من الضروري أن ينتمي لمجموعة التعريف.

والآن بالعودة للمثال:

المتسلسلة محدودة على $]0,1[$

المتتالية $\{h_n(x)\}$ حيث $h_n(x) = \frac{1}{n}$ متناقصة ومتقاربة بانتظام من التابع الصفري على I.

وبالتالي المتسلسلة المعطاة متقاربة بانتظام حسب اختبار ديريكليه.

خواص المتسلسلات المتقاربة بانتظام:

مبرهنة(1): إذا كانت التوابع $f_n(x)$ مستمرة على المجال I وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I فإن تابع المجموع $s(x)$ يكون مستمراً على I

تعريف: لتكن لدينا متسلسلة متقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$ مؤلفة من التوابع $f_n(x)$ قابلة للمكاملة على $I = [a,b]$ وإذا كان:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right] dx = \int_a^b s(x)\, dx$$

عندها نقول أن حدود المتسلسلة يمكن مكاملتها حداً حداً على $I = [a,b]$

ملاحظة: كل تابع مستمر هو قابل للمكاملة على مجال مغلق.

تعريف: لتكن لدينا المتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$ مؤلفة من التوابع $f_n(x)$ قابلة للاشتقاق على I وكان:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = s'(x) \qquad \forall\, x \in I$$

عندها نقول أن المتسلسلة يمكن اشتقاقها حداً حداً على المجال I

ملاحظة: بالاشتقاق لا يوجد لدينا مشكلة إذا كان المجال مغلق.

مبرهنة:

لتكن $f_n(x)$ توابع مستمرة على I و $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع متقاربة بانتظام على $I = [a,b]$ فإنه يمكن مكاملتها حداً حداً على I

مثال:

متسلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ هي متقاربة بانتظام على $|x| < 1$ أو على المجال $[-p, p]$ و $0 < p < 1$ ومجموعها $s(x) = \frac{1}{1-x}$

الحل:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

هذه الحدود مستمرة والمتسلسلة متقاربة بانتظام وبالتالي:

نستطيع مكاملتها حداً حداً

$$\int_{p-}^{p} \frac{dx}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-p}^{p} x^n \, dx = \int_{-p}^{p} (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) \, dx$$

$$\int_{-p}^{p} \frac{dx}{1-x} = \int_{-p}^{p} dx + \int_{-p}^{p} x \, dx + \int_{-p}^{p} x^2 \, dx + \int_{-p}^{p} x^3 \, dx + \cdots$$

$$\Rightarrow [-\ln(1-x)]_{-p}^{p} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^n + 1}{n+1}\right]_{-p}^{p} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{n+1}}{n+1}$$

$$\ln \frac{1+p}{1-p} = 2\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right)_0^p = 2\left(p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{3} + \cdots\right) \ ; \ \ 0 < p < 1$$

وبالتالي أصبح لدينا تابع جديد يمكن أن نغير فيه ونعطيه أي قيمة.

مبرهنة:

لتكن متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ المعرفة على المجال $I = [a, b]$ بحيث يكون:

1) المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة على I ومجموعها $s(x)$

2) التوابع $f_n(x)$ قابلة للاشتقاق على I بالنسبة لـ x

3) التوابع $\frac{df_n(x)}{dx}$ هي توابع مستمرة على I

4) متسلسلة المشتقات $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ متقاربة بانتظام على I عندئذٍ يمكن اشتقاق المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ حداً حداً على I.

مثال:

متسلسلة التوابع

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^3 x}{n^2}$$

متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$

لكن متسلسلة المشتقات لها:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^2} \cos n^3 x = \sum_{n=1}^{\infty} n \cos n^3 x$$

وهي متباعدة من أجل جميع القيم.

$$x = \frac{K\pi}{n^3} \in \mathbb{R}$$

حيث K عدد صحيح.

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$

متسلسلة المشتقات لها:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

وهي متقاربة بانتظام حسب اختبار فايرشتراس

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{nx}{n^3}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{nx}{n^3}\right)'$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{nx}{n^2}$$

متسلسلات القوى

تعريف متسلسلة القوى:

متسلسلة القوى هي متسلسلة توابع لها الشكل التفصيلي الآتي:

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n$$

ولها الشكل المختصر الآتي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

حيث a عدد ثابت يدعى مركز متسلسلة القوى وحيث:

$c_0 , c_1 , c_2 , \dots c_n$ أعداد تدعى أمثال متسلسلة القوى.

أمثلة:

1) إن مركز متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n(x-1)^n$ هو $a=1$

2) إن مركز متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}x^n$ هو $a=0$

3) إن مركز متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}(x+2)^n$ هو $a=-2$

لكل متسلسلة قوى مجال تقارب نصف قطره ρ أي أن ρ هو نصف طول المجال الذي تتقارب عليه متسلسلة القوى المعطاة و لما كان a مركز تقارب هذه المتسلسلة فإن مجال التقارب الآنف الذكر هو المجال $]a-\rho, a+\rho[$ و تكون عندئذٍ المتسلسلة متقاربة باطلاق من أجل كل x تنتمي إلى المجال المفتوح $]a-\rho, a+\rho[$ أما عند أطرف المجال فنواجه حالات شك .. حيث أن متسلسلة القوى قد

تتقارب عند أحد طرفي المجال أو كلاهما و قد تتباعد لذا سنكون بحاجة إلى دراسة تقارب المتسلسلة عند طرفي المجال

مثال : لنوجد مجال تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

و هي متسلسلة قوى مركزها $x = 0$:

بداية نلاحظ أن المتسلسلة متقاربة من أجل $x = 0$ و مجموعها :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\Bigg|_{x=0} = 1 + 0 + \frac{0}{2!} + \frac{0}{3!} + \cdots = 1$$

عندما $x \neq 0$ لنطبق معيار دالمبير :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0 < 1\ \forall x \in R$$

فحسب معيار دالمبير تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ متقاربة على كامل R أي أن مجال تقاربها $R =]-\infty, +\infty[$ و بالتالي نصف قطر التقارب $\rho = \infty$

##إضافي : لاحظ أننا درسنا في مقرر التحليل 1 أن تابع المجموع للمتسلسلة السابقة هو :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x, \forall x \in R$$

فمتسلسلة القوى السابقة متقاربة من التابع الأسي من أجل جميع قيم x من R و لاحظ عندما $x = 0$ فإن :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\Bigg|_{x=0} = 1 = e^0$$

و هذا يتوافق مع ما نتج معنا قبل قليل .