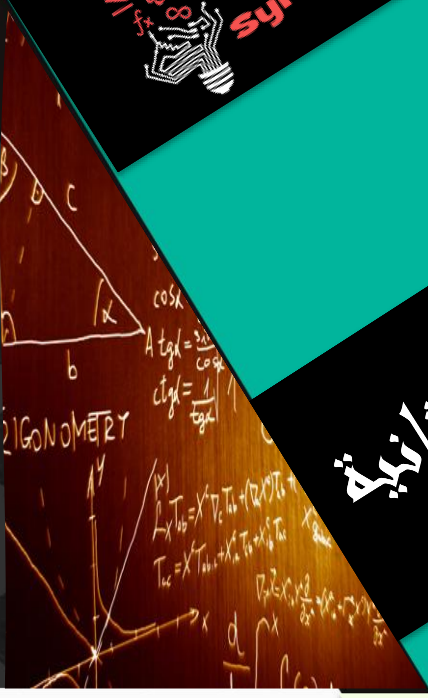
معك نحو

التخرج

Syria Math Team



السنة الثانية

العددي1

المحاضرة 12

نظري

◄ دكتور المادة: رشا بعاج

◄ المحاضرة: 12 ◄ عنوان المحاضرة: الاستيفاء

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-الخطأ الأعظمي المرتكب بطريقة الاستيفاء

2-حل تمارين+حل الوظيفة

الخطأالأعظمي المرتكب :

$$E_{\max} = \left| \frac{K_{n+1}(x)}{(n+1)!} * f^{n+1}(\xi) \right|$$

ملاحظة: لإيجاد اذا كانت النقاط متساوية أم لا، نحسب البعد h بين كل نقطتين بشرط أن تكون النقاط متتالية

(يعني ورا بعضها)

كيف نوجد $K_{n+1}(x)$ ؟؟

بطريقتين:

الأولى: اذا كانت النقاط متساوية البعد فيما بينها

$$\max K_{n+1}(x) \le \frac{h^{n+1}}{4} n!$$

بحيث $h = |x_i - x_{i+1}|$

الثانية: اذا لم تكن النقاط متساوية البعد فيما بينها نعوض النقطة المطلوبة في الجداء

$$\boxed{K_{n+1}(x^*) = (x^* - x_0)(x^* - x_1) \ldots (x^* - x_n)}$$

(خطأ....ان هذا غير صحيح)**(يعني هاد الشي خطأ بالتحليل العددي بس العلماء اتفقو انو صح...)**

مثال: لتكن النقاط الأتية

x_i	0	0.6
$f(x_i)$	0	0.47000

المطلوب:

1) أوجد حدودية لاغرانج الخطية التي تستوفي النقاط السابقة
2) أوجد الخطأ الأعظمي المرتكب و الخطأ الفعلي المرتكب عند $x = 0.45$ اذا علمت أن

$$f(x) = \ln(x+1)$$

الحل:

1) عدد النقاط $2 = n + 1 \Leftarrow n = 1 \Leftarrow$ الحدودية خطية

خطية يعني درجة أولى

$$P_1(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1$$

بما أن $y_0 = 0 \Leftarrow$ لا نحسب $L_0(x)$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - 0}{0.6 - 0}$$

$$L_1(x) = \frac{1}{0.6}\,x$$

$$P_1(x) = \frac{0.47000}{0.6}\,x$$

$$P_1(x) = 0.78334\,x$$

لا أسأل عن كثيرة حدود لاغرانج الا اذا كانت تستوفي جميع النقاط

يعني اشتغل عالقانون

2) $E_{\max} = \left|\frac{K_{n+1}(x)}{(n+1)!}\right| f^{n+1}(\xi)$

$$f(x) = \ln(x+1)$$

تنويه: اذا لم تعطى شكل الدالة بالسؤال نوجد الخطأ الأعظمي $(K_{n+1}(x), (n+1)!)$ و نقول كالاتي:

نوجد المشتق من المرتبة $n+1$ للدالة ،لأن الدالة غير موجودة و لا يمكن حساب هذا المقدار

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

و منه فالدالة $f''(x)$ متناقصة على المجال $[0,0.6]$ فهي تبلغ قيمتها العظمى عند $x = 0$

$$\max_{[0,0.6]} |f''(x)| = 1$$

بما أن عدد النقاط 2 نوجد

$$max\, K_{n+1}(x) \le \frac{h^{n+1}}{4} n!$$

حيث $h = |0.6 - 0|$

$$max\, K_{n+1}(x) \le \frac{(0.6)^2}{4} 1!$$

$$max\, K_{n+1}(x) \le 0.09$$

$$(n+1)! = 2! = 2$$

نعوض:

$$E_{max} \le \frac{0.09}{2} 1$$

$$E_{max} \le 0.045$$

تنويه:

عند تطبيق قانون الخطأ الأعظمي نضع $\le$ وليس $=$

لأننا أخذنا

$max\, K_{n+1}(x)$

الخطأ الفعلي:

$$T = ln(1.45) = 0.37156$$

$$Q = P(0.45) = 0.352503$$

$$E_{exact} = |T - Q| = 0.019057$$

حل وظيفة المحاضرة السابقة:

الحل:

1- عدد النقاط $n+1=3 \Longleftarrow n=2$

$$P_2(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2$$

$$y_0 = \sin(0.2(1.1)+4)$$

$$y_1 = \sin(0.2(2.3)+4)$$

$$y_2 = \sin(0.2(4.1)+4)$$

x_i	1.1	2.3	4.1
y_i	-0.881206	-0.96831	-0.99421

$$L_0(x) = \frac{1}{3.6}(x-2.3)(x-4.1)$$

$$L_1(x) = \frac{1}{2.61}(x-1.1)(x-4.1)$$

$$L_2(x) = \frac{1}{5.4}(x-1.1)(x-2.3)$$

$$P_2(x) = -\frac{0.881206}{3}(x-2.3)(x-4.1) - \frac{0.966831}{2.61}(x-1.1)(x-4.1) - \frac{0.99421}{5.4}(x-1.1)(x-2.3)$$

$$\sin(4.24) = \sin(0.2x+4)$$

$$0.24x + 4 = 4.24$$

$$x = 1.2$$

$$P_2(1.2) = -0.93308 = Q$$

2- $T = \sin(4.24) = -0.9048$

$$E_{exact} = |T-Q|$$

$$E_{exact} = 0.04067$$

$$R_{exact} = \left|\frac{E_{exact}}{T}\right|$$

$$R_{exact} = 0.04567$$

3- الخطأ الأعظمي المرتكب :

النقاط ليست متساوية البعد $\Leftarrow K_{n+1}(x) = (x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_2)$

$$f(x) = \sin(0.2x + 4)$$

$$f'(x) = 0.2\cos(0.2x + 4)$$

$$f''(x) = -0.04\sin(0.2x + 4)$$

$$f'''(x) = -0.008\cos(0.2x + 4)$$

دالة متناقصة تبلغ قيمتها العظمى عند 1.1

$$\max|f^n(x)| = 0.007978$$

و النقاط غير متساوية البعد اذا

$$K_{\max}(x) = (1.2 - 1.1) + (1.2 - 2.3) + (1.2 - 4.1) = -3.9$$

$$\Rightarrow E_{\max} \leq 0.0051857$$

و هو الخطأ الأعظمي المرتكب.

الوظيفة:

بفرض لدينا النقاط $x_i = \ 0.2\,, 0.4\,, 0.6\,, 0.8\,, 1$

و الدالة $\ln(1 + 0.3x)$

أوجد كثيرة الحدود و الخطأ الأعظمي المرتكب .

الحل:

$$n + 1 = 5 \Rightarrow n = 4$$

$$P_4(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 + L_3(x)y_3 + L_4(x)y_4$$

و لنحسب y_0, y_1, y_2, y_3, y_4

$$y_0 = f(x_0) = 0.0582689081$$

$$y_1 = f(x_1) = 0.1133286853$$

$$y_2 = f(x_2) = 0.1655144385$$

$$y_3 = f(x_3) = 0.251113796$$

$$y_4 = f(x_4) = 0.2623642645$$

لنوجد مضاريب لاغرانج

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}$$

$$= \frac{(x-0.4)(x-0.6)(x-0.8)(x-1)}{0.0384}$$

$$L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}$$

$$= \frac{(x-0.2)(x-0.6)(x-0.8)(x-1)}{-0.0128}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}$$

$$= \frac{(x-0.2)(x-0.4)(x-0.8)(x-1)}{0.0064}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0.2)(x-0.4)(x-0.6)(x-1)}{-0.0096}$$

$$L_4(x) = \frac{(x-0.2)(x-0.4)(x-0.6)(x-0.8)}{0.0384}$$

$$\begin{aligned} P_4(x) = {} & 1.5174194818\,(x-0.4)(x-0.6)(x-0.8)(x-1) \\ & - 8.8538035391\,(x-0.4)(x-0.6)(x-0.8)(x-1) \\ & + 25.8616310156\,(x-0.4)(x-0.2)(x-0.8)(x-1) \\ & - 22.407435375(x-0.2)(x-0.4)(x-0.6)(x-1) \\ & + 6.8324027214\,(x-0.2)(x-0.4)(x-0.6)(x-0.8) \end{aligned}$$

<u>الخطأ الأعظمي :</u>

$$E_{\max} \leq \left|\frac{K_{n+1}(x)}{(n+1)!}\, f^{n+1}(\xi)\right|$$

$$f(x) = \ln(1+0.3x)$$

$$f'(x) = \frac{0.3}{1+0.3x}$$

$$f''(x) = \frac{-0.09}{(1+0.3x)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2\big((1+0.3x)0.3\big)(-0.09)}{(1+0.3x)^4}$$

$$= \frac{-0.054(1+0.3x)}{(1+0.3x)^4}$$

$$f''''(x) =$$

$$\frac{\Big((0.3)(-0.054)(1+0.3x)^4 - \big(4*0.3*(-0.054)(1+0.3x)^3(1+0.3x)\big)\Big)}{(1+0.3x)^8}$$

$$f''''(x) = \frac{-0.0162(1+0.3x)^4 + 0.0648(1+0.3x)^3}{(1+0.3x)^8}$$

و بما أن النقاط متساوية البعد فان :

$$\max K_{n+1} \leq \frac{(0.2)^8}{4}\;4!$$

$$\leq 0.00192$$

انتهت المحاضرة

اعداد: أبرار الخالد-بشير الرمال-راما عوض

المشرف العلمي : نذير تيناوي