معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثالثة

التحليل العقدي1

المحاضرة 14

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 3rd year

2019/11/20

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ عنوان المحاضرة: خواص المتتاليات

◄ المحاضرة: الرابعة عشر

نظري

مبرهنة

تكون المتتالية العقدية $\{z_n = x_n + i\, y_n\}$ متقاربة من $a = x_n + iy_n$ إذا وفقط إذا كانت متتالية الأجزاء الحقيقية متقاربة إلى $x_n = Rea$ ومتتالية الأجزاء العقدية متقاربة إلى $y_n = Ima$.

البرهان

$(\Longleftarrow)$ لنفرض أن $\{z_n\}$متقاربة و نهايتها a عندئذٍ :

$$\forall \varepsilon > 0 :\ \exists N \geq 0 \,; \forall n \geq N \,; |z_n - a| < \varepsilon$$

سنثبت أن متتالية الأجزاء الحقيقية متقاربة من Rea

$$\left| \underbrace{x_n}_{Re\, z_n} - Re\, a \right| = |Re(z_n - a)| \leq |z_n - a| < \varepsilon$$

$\Leftarrow \quad \{x_n\}$متقاربة من $Re\ a$

وبنفس الأسلوب لنثبت أن متتالية الأجزاء التخيلية متقاربة من Ima

ثم أن : $$|y_n - Im\, a| = |Im(z_n - a)| \leq |z_n - a| < \varepsilon$$

$\Leftarrow \quad \{y_n\}$متقاربة من $Im\ a$

$(\Longrightarrow)$ لنفرض أن $\{x_n\}$متقاربة من α و $\{y_n\}$متقاربة من β عندئذ :

$$\forall \varepsilon > 0 : \begin{cases} \underbrace{\exists N_1 > 0}_{x_n \to Re\, a} \,;\ \forall n \geq N_1 \Longrightarrow |x_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2} \ldots\ldots(1) \\ \underbrace{\exists N_2 > 0}_{y_n \to Im\, a} \,;\ \forall n \geq N_2 \Longrightarrow |y_n - \beta| < \dfrac{\varepsilon}{2} \ldots(2) \end{cases}$$

من (1) و (2)

$|i| = 1$

$$\Longrightarrow \exists N = \max(N_1, N_2)$$

$$\forall n \geq N \,;\, |z_n - a| = |(x_n - \alpha) + i(y_n - \beta)|$$

$$\leq |x_n - \alpha| + |y_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \Longrightarrow \boxed{z_n \longrightarrow a}$$

مبرهنة:

$\{z_n = x_n + i\, y_n\}$ متتالية كوشية في $\mathbb{C} \Leftrightarrow \{x_n\}, \{y_n\}$ كوشيتان في $\mathbb{R}$

مبرهنة: أثبت أن $\mathbb{C}$فضاء تام (أثبت أن كل متتالية كوشية متقاربة)

البرهان:

فرض أن $\{z_n\}$ متتالية كوشية في $\mathbb{C}$ و هذا يقتضي حسب مبرهنة سابقة

$\Leftarrow \{Re\ z_n\}, \{Im\ z_n\}$ كوشيتان في $\mathbb{R}$

ونعلم أن $\mathbb{R}$ فضاء تام

$\Leftarrow \{Re\ z_n\}, \{Im\ z_n\}$ متقاربتان في $\mathbb{R}$ حسب مبرهنة سابقة فإن

$\Leftarrow \{z_n\}$ متقاربة في $\mathbb{C}$

نقطة تجمع المتتالية

نقول عن a أنها نقطة تجمع متتالية عقدية $\{z_n\}$ إذا وفقط إذا حوت أي جوار لـ a عدداً غير منتهي من حدود المتتالية z_n

نتيجة :

نهاية أي متتالية في حالة وجودها هي نقطة تجمع لتلك المتتالية والعكس غير صحيح في الحالة العامة .

ملاحظة : و هذا الكلام صحيح من أجل نقطة اللانهاية .

ويعني جوار اللانهاية : خارج أي قرص مركزه أي قرص مركزها المبدأ سيكون معرفا بمتراجحة من الشكل $\mathbb{R} < |z|$ أي خارج القرص مركزها صفر ونصف قطرها $\mathbb{R}$

مثال :

المتتالية : $z_n = n + ni$

هذه أثبتنا أنها كمجموعة لا تملك نقاط تجمع ، لكنها كمتتالية لها نقطة تجمع وحيدة هي∞ وهي متباعدة ، لو كانت متقاربة لكان لها نقطة تجمع هي النهاية

ملاحظة :

للمتتالية المتقاربة نقطة تجمع وحيدة هي نهايتها .

مثال :

$\{i^n\}$ متتالية متباعدة لأنها متأرجحة بين أربع قيم $\{-i\,,-1\,,i\,,1\}$ مجموع قيم المتتالية هذه لا تملك نقطة تجمع لكنها كمتتالية تملك أربع نقاط تجمع $\{-i\,,-1\,,i\,,1\}$

فإن أي جوار لأي منها هذه القيم سيحوي عدداً غير منتهي من الحدود المتتالية على الأقل وهو سيحوي الحدود المساوي لتلك القيمة وعددها غير منتهي

ملاحظة :

نقطة التجمع متتالية ليس من الضروري أن تكون نقطة تجمع لمجموعة قيمها إلا أن العكس صحيح

مبرهنة

$\{z_n = x_n + i\, y_n\}$ متتالية كوشية في $\mathbb{C} \Leftrightarrow \{x_n\},\{y_n\}$ كوشيتان في $\mathbb{R}$

البرهان:

$\Leftarrow$ بفرض $\{z_n\}$ أن كوشية أي تحقق :

$$\forall\, \varepsilon > 0\,; \exists n_0 \geq 0\,; m\,,n \geq n_0 \Longrightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon$$

لنثبت أن $\{x_n\},\{y_n\}$ كوشيتان

$$|x_n - x_m| = |\,Re\; Z_n - Re\; z_m| = |\,Re\,(z_n - z_m)| \leq |z_n - z_m| < \varepsilon$$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

ومنه $\{x_n\}$ كوشية لأنه يحقق :

$$\forall\, \varepsilon > 0\,;\exists n_0 \geq 0\,;m\,,n \geq n_0 \Longrightarrow |y_n - y_m| < \varepsilon$$

بفرض $\Longleftarrow$ $\{x_n\},\{y_n\}$ كوشيتان في $\mathbb{R}$

لنثبت أن $\{z_n\}$ كوشية

$$\Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\,;\exists N \geq 0\,;m\,,n \geq N \Longrightarrow \begin{cases} |x_m - x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ |y_m - y_n| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$|z_m - z_n| = |(x_m - x_n) + i\,(y_m - y_n)|$$

$$\underbrace{\leq}_{\text{حسب خواص القيمة المطلقة}} |x_m - x_n| + |y_m - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Longleftarrow$ $\{z_n\}$ كوشية