معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثالثة

التحليل التابعي1

المحاضرة 10

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 3rd year

◄المحاضرة : العاشرة

◄ أستاذ العملي: محمد الخطيب

تمرين 1:

بين أن موضوعات دالة المسافة الثالثة و الرابعة تستنتجان من الموضوعة الثانية و من المتراجحة

$$d(x,y) \leq d(z,x) + d(z,y)$$

الحل : لدينا من المتراجحة المفروضة من أجل كل $x,y,z \in X$ فإنه يكون :

$$d(x,y) \leq d(z,x) + d(z,y)$$

خذ $z = y$

$$d(x,y) \leq d(y,x) + \underbrace{d(y,y)}_{=0} = d(y,x)$$

و بشكل مماثل نجد أن $d(y,x) \leq d(x,y)$ و بالتالي $d(x,y) = d(y,x)$ (و هي الموضوعة الثالثة)

الآن من المتراجحة المفروضة :

$$d(x,y) \leq d(z,x) + d(z,y) \underbrace{=}_{\text{الموضوعة الثالثة}} d(x,z) + d(z,y)$$

و هي متراجحة المثلث (الموضوعة الرابعة)

تمرين 2: بين أن الموضوعة الأولى بأن المسافة دوماً موجبة تستنتج من الموضوعتين الثانية والرابعة

الحل : أياً كان $x,y,z \in X$ فحسب الموضوعة الرابعة

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

لنأخذ $x = y$:

$$d(x,x) \le d(x,z) + d(z,x)$$

و بالتالي : $0 \le 2d(x,z)$ و بالتالي $d(x,z) \ge 0$

تمرين : أوجد متتالية متقاربة من 0 دون أن تكون منتمية إلى أي فضاء ℓ^p حيث $1 \le p \le \infty$.

الحل : لنأخذ المتتالية $i \in N$ $x = (\varepsilon_i)$ حيث :

$$\frac{1}{1}, \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}_{2^2\ time}, \underbrace{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots\dots, \frac{1}{3}}_{3^3}, \dots\dots, \underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots\dots, \frac{1}{n}}_{n^n\ time}, \dots$$

من الواضح أن محدودة وأن $x \to 0$ عندما $n \to \infty$ ليكن $1 \le p \le \infty$.

نرفع الحدود للقوة p حيث :

$$\frac{1}{1^p}, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{3^p}, \frac{1}{3^p}, \dots\dots, \frac{1}{3^p}, \dots\dots, \frac{1}{n^p}, \frac{1}{n^p}, \dots\dots, \frac{1}{n^p}$$

$$\frac{1}{1^p} + \frac{2^2}{2^p} + \frac{3^3}{3^p} + \frac{n^n}{n^p} + \cdots . = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n^p}$$

متسلسلة حدها العام $\frac{n^n}{n^p} \to \infty$ لأي $1 \le p \le \infty$ ومنه المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p$ متباعدة لأي $1 \le p \le \infty$.

وبالتالي فإن $x \notin \ell^p$ لاي $1 \le p \le \infty$ لكن $x \in \ell^\infty$ لأي $1 \le p \le \infty$.

تمرين : ليكن (X,d) فضاء متري ولتكن $\emptyset \ne B \subseteq X$ وإن $x \in X$ حيث:

$$D_x = \{d(x,\bar{b}), \bar{b} \in B\} \subseteq R$$

$$f:(x,d) \to (R,|.|)$$

$$x \to f(x) = D(x,B) = \inf d(x,\bar{b}) \quad ;\bar{b} \in B$$

أثبت أن هذا التطبيق مستمر بانتظام على x

الحل :

$$(X,d)\ ;\ \ B \neq \emptyset$$

$$\forall\ x \subseteq X\ ; M_x = \{d(x,b`0\ ; b` \subseteq B\} \subseteq R$$

$$D(x,B) = \inf M_x = \inf d\big(x,b`\big);\quad b` \in B$$

$$f:(x,d) \to (R,|.|)$$

$$x \mapsto f_B(x) = \inf d\big(x,b`\big) = D(x,b)$$

لإثبات أن التطبيق مستمر بانتظام يجب أن يتحقق :

$$\forall\varepsilon > 0\ ; \exists\delta = \delta(\varepsilon);\ \forall x,y \in X\ :\ d\big(x,y\big) < \delta\ \ \Rightarrow \big|D(x,B) - D\big(y,B\big)\big| < \varepsilon$$

لنثبت أنها مستمرة بانتظام :

$$\big|D(x,B) - D\big(y,B\big)\big| < d\big(x,y\big)$$

وليكن x,y من X لأي $b \in B$ فإن :

$$D(x,B) = \inf d\big(x,\bar{b}\big) \le d\big(x,\bar{b}\big) \le d\big(x,y\big) + d\big(y,\bar{b}\big)$$

لأي $\bar{b} \in B$:

$$D(x,B) \le d\big(x,y\big) + d\big(y,\bar{b}\big)$$

ومنه فإن :

$$D(x,B) \le d\big(x,y\big) + inf\, d\big(y,\bar{b}\big) = d(x,y) + D(y,B)$$

$$\Rightarrow D(x,B) - D(y,B) \le d(x,y)\ \ \ldots\ldots(1)$$

وبالمبادلة بين y,x وإعادة المناقشة نحصل على :

$$D(y,B) - D(x,B) \le d(x,y)\ \ \ldots\ldots(2)$$

من 1 و 2 نجد أن : $|D(x,B) - D(y,B)| \le d(x,y)$

وبالتالي $|D(x,B)-D(y,B)| \le d(x,y) < \delta = \varepsilon$

فإن التطبيق مستمر بانتظام

تمرين :

إذا كان (X,d) أي فضاء متري ، فأثبت أن المساواة :

$$\sigma(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

تحدد متركاً أخر على X ، وأن X محدود بخصوص المترك σ .

الحل :

أيا كان $x,y,z \in X$ فإن :

$$1)\ \mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \ge 0 \,, 1+d(x,y) \ge 1 > 0 \Rightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \ge 0 \Rightarrow \sigma(x,y) \ge 0$$

$$2)\ \sigma(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\sigma(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = \sigma(\mathrm{y},\mathrm{x})$$ "خاصة التناظر"

$$\sigma(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 1 - \frac{1}{1+d(x,y)} \le 1 - \frac{1}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

$$= \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} = \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

$$\le \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} = \sigma(x,z) + \sigma(z,y)$$

لأي x,y من X فإن :

$$0 \le d(x,y) < 1 + d(x,y) \xRightarrow[\text{بالتقسيم } (1+d(x,y)\neq 0)]{} 0 \le \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < 1$$

$$\Longrightarrow 0 \le \sigma(x,y) < 1$$

ومنه$\delta(X) = sup\sigma(x,y) = 1 < \infty$ وبالتالي X محدودة بخصوص المترك σ .

انتهت المحاضرة

إعداد: رولا الشيخ – تقى إسماعيل–بسمة نصرالله