معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثانية

التحليل 3

المحاضرة 1 (عملي)

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2nd year

نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: الأولى عملي ◄ عنوان المحاضرة: الجداءات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة تمارين عن بحث الجداءات :

احسب قيمة الجداء :

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right)\ :|x|<1$$

بداية لنشكل متتالية المجاميع الجزئية و التي حدها العام :

$$p_n=\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\dots\left(1+x^{2^n}\right)$$

و الآن و بهدف تبسيط الحد العام من أجل التمكن من حساب نهايته بسهولة لنضرب الطرفين بالمقدار $(1-x)\neq 0$

$$(1-x)p_n=\underbrace{(1-x)(1+x)}_{(1-x^2)}(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\dots\left(1+x^{2^n}\right)$$

$$(1-x)p_n=\underbrace{(1-x^2)(1+x^2)}_{(1-x^4)}(1+x^4)\dots\left(1+x^{2^n}\right)$$

$$(1-x)p_n=(1-x^4)(1+x^4)(1+x^8)\dots\left(1+x^{2^n}\right)$$

$$=\left(1-x^{2^n}\right)\left(1+x^{2^n}\right)=1^2-\left(x^{2^n}\right)^2=1-x^{2.2^n}=1-x^{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow\ p_n=\frac{\left(1-x^{2^{n+1}}\right)}{1-x}$$

بأخذ نهاية p_n و بملاحظة أن $\lim_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0$ لأن $|x|<1$ نستنتج أن :

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{1-x}$$

أي أن الجداء متقارب وقيمته: $\boxed{p = \frac{1}{1-x}}$

تمرين

$$\prod_{n=1}^{\infty} . \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \quad : \theta \neq 0$$

لنشكل متتالية الجداءات الجزئية :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} . \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

نضرب و نقسم بـ $2\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$:

$$p_n = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\ldots\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right).\mathbf{2}\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\mathbf{\sin}\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

و لكن نعلم أن $2\cos(a)\sin(a) = \sin(2a)$

و بالتالي المقدار $\mathbf{2}\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\mathbf{\sin}\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}}\right)$ الموجود في نهاية البسط يكتب بالشكل $\sin\left(2\frac{\theta}{2^n}\right) = \sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)$

نعوض الآن : (و في نفس الوقت سنضرب و نقسم على 2 ليظهر القانون مرة أخرى)

$$p_n = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\ldots 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right).\mathbf{\sin}\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{n-1}}}\right)}{2\,.2\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

مرة أخرى ظهر في البسط القانون مرة أخرى و بالتالي :

$$2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right).\mathbf{\sin}\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{n-1}}}\right) = \boldsymbol{\sin}\left(\mathbf{2}\frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{n-1}}}\right) = \boldsymbol{\sin}\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{n-2}}}\right)$$

نعوض :

$$p_n = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\dots\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right)}{2^2 \, . \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

و هكذا حتى نصل :

$$p_n = \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

الآن لإظهار نهاية شهيرة ، سنضرب و نقسم بـ θ :

$$p_n = \frac{1}{\theta} \frac{\theta \sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = \frac{sin\theta}{\theta} \frac{\frac{\theta}{2^n}}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

بأخذ النهاية نجد أن :

$$limp_n = \frac{sin\theta}{\theta}$$

لأن :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\theta}{2^n}}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin(t)} = 1$$

و بالتالي الجداء متقارب و قيمته $\frac{sin\theta}{\theta}$ (علماً أن $\theta \neq 0$)

تمرين :

احسب قيمة الجداء

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}$$

نشكل متتالية الجداءات الجزئية :

$$p_n = \frac{e^1}{1+1} \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{3}} \cdots \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}$$
$$= \frac{e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}}{\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n}{n-1}\frac{n+1}{n}}$$

نختصر (حيث في المقام الكلي جداء كسور بسط كل واحد منها يساوي مقام الكسر التالي)

$$p_n = \frac{e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}}{n+1}$$

معلومة حلوة كتير ^_^ :

وجد السيد أولر بعد جهد جهيد أن ال المتتالية التي حدها العام : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)$ تسعى لعدد جميل جداً سمي c (عدد أولر) أي أن :

$$\lim\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-ln(n)\right)=c$$

و بالتالي إذا أخذن الحد العام دون نهاية (يعني لم نسع إلى اللانهاية) فيكون الناتج c زائد باقي صغير جداً نرمز له γ_n (نقصد بصغير جداً أن $\gamma_n \to 0$)

إذن الآن يمكن أن نكتب :

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)=c+\gamma_n$$
$$or \quad 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln(n)+c+\gamma_n$$

نعوض :

$$p_n = \frac{e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}}{n+1} = \frac{e^{\ln(n)+c+\gamma_n}}{n+1} = \frac{e^{\ln(n)}.e^c.e^{\gamma_n}}{n+1}$$

و لكن $e^{\ln n}=n$ إذن :

$$p_n = \frac{ne^c e^{\gamma_n}}{n+1}$$

بأخذ النهايات و بملاحظة أن $\lim\left(\frac{n}{n+1}\right)=1$ و $\lim(e^{\gamma_n})=e^0=1$ نجد أن :

$$\lim p_n = e^c.1 = e^c$$

فالجداء متقارب وقيمته e^c

معلومة أحلى ^_^ :

$$c \simeq 0.4672$$

تمرين : أوجد قيمة الجداء:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{2n+7}{2n+5}$$

نشكل متتالية الجداءات الجزئية :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k+3} \cdot \frac{2k+7}{2k+5} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k+3} \cdot \prod_{k=1}^{n} \cdot \frac{2k+7}{2k+5}$$

$$= \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{9} \cdots \cdots \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n+3}\right) \cdot \left(\frac{9}{7} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{13}{11} \cdots \cdot \frac{2n+5}{2n+3} \cdot \frac{2n+7}{2n+5}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2n+3}\right)\left(\frac{2n+7}{7}\right)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{3}{7}$$

إذن متقارب وقيمته $\frac{3}{7}$

انتهت المحاضرة

إعداد : نذير تيناوي – رنا شورية