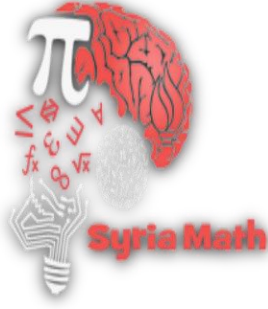


◀ دكتوراة الملاءة: هدى شحات

عنوان المحاضرة: حل مسائل

المحاضرة: السادسة عشرة

نظري



سنقوم أصدقائي في هذه المحاضرة بحل المسألة الواردة في المحاضرة السابقة .

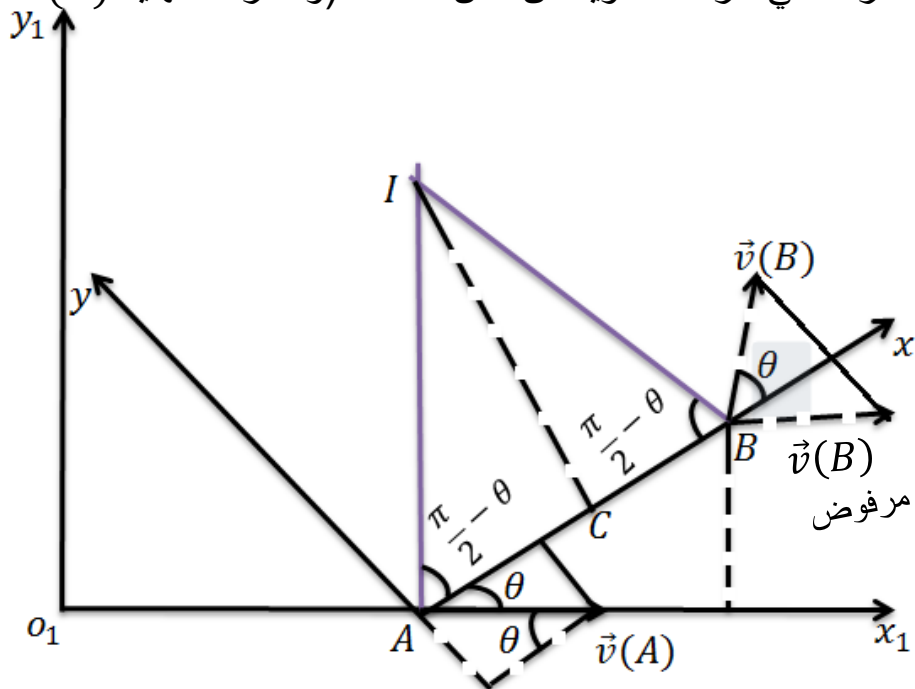
" حل المسألة من المحاضرة السابقة "

ليكن  $(AB)$  قضيب طوله  $(2\ell)$  يتحرك في المستوي الثابت  $(x_1y_1)$  بحيث تنزلق النقطة  $(A)$  من القضيب على  $(O_1x_1)$  بسرعة ثابتة قيمتها  $(v)$  وتتحرك النهاية  $(B)$  منه في المستوي  $(x_1y_1)$  بحيث تبقى قيمة سرعتها ثابتة  $v = \vec{v}(B)$  ، كان القضيب في لحظة البدء منطبقاً على  $(O_1y_1)$  والمطلوب :

- 1- عين معادلات الحركة
- 2- أوجد مسار النقطة  $(B)$
- 3- عين القاعدة والمتدرج والمركز الآني للدوران ((تحليلياً))
- 4- عين المركز الآني للدوران ((هندسياً))
- 5- أوجد تسارع النقطة  $(B)$
- 6- أوجد مركز التسارع المعلوم .
- 7- عين النقطة من القضيب ذات السرعة الصغرى في اللحظة المذكورة .

الحل :

نلاحظ أن الحركة هي حركة مستوية من نص المسألة (وتتحرك النهاية  $(B)$  منه في المستوي  $(x_1y_1)$ )



### 1) تعيين معادلات الحركة

نختار النقطة  $A(x_A, y_A)$  قطب للحركة لأن منحها معروف ونختار  $\theta$  الزاوية بين المحور  $ox_1$  والقضيب  $AB$  المحمول على المحور  $ox$ .  
وبما أن :  $|\vec{v}(A)| = v$

$$x_A = \int v dt = vt + c$$

بتعويض شروط البدء  $t = 0$  كانت  $x_A = 0$  ومنه نجد  $c = 0$  وبالتالي :

$$x_A = vt \dots (1) \quad , \quad y_A = 0 \dots (2)$$

لإيجاد الزاوية  $\theta$  نستفيد من علاقة السرعة للنقطة  $B$  :

$$\vec{v}(B) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \wedge \vec{AB}$$

حيث نعلم أن الزاوية  $\theta$  بين المستقيم المتماسك والمستقيم الثابت ، ولدينا من علاقة سرعة  $B$  السرعة الزاوية  $\vec{\omega}$  التي لها علاقة بالزاوية  $\theta$ .

$$\vec{AB} = 2\ell \cdot \cos \theta \cdot \vec{i}_1 + 2\ell \cdot \sin \theta \cdot \vec{j}_1 \quad \text{وإن}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(B) = v\vec{i}_1 + \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega = \theta' \\ 2\ell \cdot \cos \theta & 2\ell \cdot \sin \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(B) = (v - 2\ell\theta' \cdot \sin \theta)\vec{i}_1 + 2\ell\theta' \cdot \cos \theta \vec{j}_1$$

لكن حسب الفرض :  $|\vec{v}(B)| = v \Rightarrow v^2 = |\vec{v}(B)|^2$

$$v^2 = (v - 2\ell\theta' \cdot \sin \theta)^2 + (2\ell\theta' \cdot \cos \theta)^2$$

$$\Rightarrow v^2 = v^2 - 4\ell \cdot v \cdot \theta' \cdot \sin \theta + 4\ell^2 \theta'^2 \cdot \sin^2 \theta + 4\ell^2 \cdot \theta'^2 \cdot \cos^2 \theta$$

$$\Rightarrow 0 = -4\ell v \theta' \cdot \sin \theta + 4\ell^2 \theta'^2$$

$$\Rightarrow v \cdot \sin \theta = \ell \theta' \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{\ell} \cdot \sin \theta$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{\sin \theta} = \frac{v}{\ell} dt \dots \dots (*)$$

تذكرة : نجري تغيير متحول

$$\tan \frac{\theta}{2} = u \quad , \quad \cos \theta = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \quad , \quad \sin \theta = \frac{2u}{1 + u^2} \quad , \quad d\theta = \frac{2du}{1 + u^2}$$

بتعويض قيمة  $d\theta$  ،  $\sin \theta$  في المعادلة (\*) نجد :

$$\frac{2du}{\frac{2u}{1 + u^2}} = \frac{v}{\ell} dt \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{v}{\ell} dt$$

ومنه بالمكاملة نجد :

$$\Rightarrow \int \frac{d\theta}{\sin \theta} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| \Rightarrow \int \frac{d\theta}{\sin \theta} = \ln \left| \tan \frac{\theta}{2} \right|$$

ممكن في الامتحان  
ان نعتبره تكامل  
شهير

$$\Rightarrow \ln \tan \frac{\theta}{2} = \frac{v}{\ell} t + c$$

بتعويض شروط البدء  $t = 0$  كانت  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ومنه نجد  $c = 0$  وبالتالي :

$$\Rightarrow \ln \tan \frac{\theta}{2} = \frac{v}{\ell} t \Rightarrow v \cdot t = \ell \cdot \ln \tan \frac{\theta}{2} \dots \dots (*)$$

$$\Rightarrow \tan \frac{\theta}{2} = e^{\frac{v}{\ell} t} \Rightarrow \theta = 2 \operatorname{arc} \tan e^{\frac{v}{\ell} t} \dots (3)$$

ومنه يكون (1), (2), (3) هي معادلات الحركة .

**2) إيجاد مسار النقطة B**

$$\overrightarrow{o_1 B} = \overrightarrow{o_1 A} + \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{o_1 B} = v \cdot t \vec{i}_1 + 2\ell \cdot \cos \theta \vec{i}_1 + 2\ell \cdot \sin \theta \vec{j}_1$$

$$x_1(B) = \underbrace{v \cdot t}_{\text{نعوض في *}} + 2\ell \cdot \cos \theta, \quad y_1(B) = 2\ell \cdot \sin \theta$$

$$x_1(B) = \ell \cdot \ln \tan \frac{\theta}{2} + 2\ell \cdot \cos \theta$$

$$y_1(B) = 2\ell \cdot \sin \theta$$

المعادلات الوسيطة لمسار B

**3) تعيين القاعدة والمتدرج والمركز الآني للدوران ( تحليلياً )**

بفرض احداثيات المركز الآني للدوران

في جملة ثابتة  $I(X_1, Y_1)$  هو :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{\omega^2} \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v}(A) \Rightarrow (X_1 - x_A, Y_1 - y_A) = \frac{1}{\omega^2} \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ v & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$X_1 - vt = 0 \Rightarrow X_1 = vt = \ell \cdot \ln \tan \frac{\theta}{2}$$

$$Y_1 - 0 = \frac{v}{\omega} \Rightarrow Y_1 = \frac{v}{\theta'} = \frac{\ell}{\sin \theta}$$

المعادلات  
الوسيطة للقاعدة

ومنه احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة الثابتة هو  $I\left(\ell \cdot \ln \tan \frac{\theta}{2}, \frac{\ell}{\sin \theta}\right)$

في جملة متماسكة  $I(X, Y)$  هو :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{\omega^2} \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v}(A)$$

هنا يجب اسقاط سرعة النقطة A من الجملة الثابتة الى الجملة المتحركة

$$\vec{v}(A) = v \vec{i}_1 \Rightarrow \vec{v}(A) = v(\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j})$$

$$\vec{AI} = \frac{1}{\omega^2} \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v}(A) \Rightarrow (X - 0, Y - 0) = \frac{1}{\omega^2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ v \cdot \cos \theta & -v \cdot \sin \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$X = \frac{v}{\omega} \cdot \sin \theta = \ell \quad \text{المتدرج هو محور القضيبي}$$

$$Y = \frac{v}{\omega} \cos \theta$$

ومنه احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة المتماسكة هو  $I \left( \ell, \frac{v}{\omega} \cos \theta \right)$

#### 4) تعيين المركز الآني للدوران ( هندسياً )

نقوم أولاً بتعيين منحى شعاع سرعة النقطة  $B$  وذلك باستخدام نظرية المساقط على النقطتين  $A, B$

$$\vec{v}(A) \cdot \vec{AB} = \vec{v}(B) \cdot \vec{AB}$$

$$|\vec{v}(A)| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos \theta = |\vec{v}(B)| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \theta = \cos \varphi \Rightarrow \varphi = \begin{cases} \theta & \text{مقبولة} \\ -\theta & \text{مرفوضة} \end{cases}$$

$\varphi = -\theta$  مرفوضة لأنها تحقق أن  $\vec{v}(A)$  توازي  $\vec{v}(B)$  ، كما أنه لدينا  $|\vec{v}(A)| = |\vec{v}(B)|$  وبالتالي فإن  $\vec{v}(B) = \vec{v}(A)$  أي أن الحركة انسحابية وهذا مرفوض .

وبفرض احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة الثابتة هي  $I(X_1, Y_1)$  عندئذ :

$$\begin{aligned} X_1(I) &= o_1 A = vt = \ell \cdot \ln \tan \frac{\theta}{2} \\ Y_1(I) &= AI = \frac{\ell}{\cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right)} = \frac{\ell}{\sin \theta} \end{aligned}$$

المعادلات  
الوسيطية للقاعدة  
هندسياً

وبفرض احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة المتماسكة هي  $I(X, Y)$  عندئذ :

$$\begin{aligned} X &= Ac = \ell \\ Y &= cI = AI \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \Rightarrow Y = \frac{\ell}{\sin \theta} \cdot \cos \theta = \ell \cdot \cot \theta \end{aligned}$$

المعادلات  
الوسيطية  
للمتدرج  
هندسياً

أي المركز الآني للدوران هندسياً في الجملة المتماسكة هي  $I(\ell, \ell \cdot \cot \theta)$

#### 5) لإيجاد تسارع النقطة (B) من العلاقة التالية :

$$\vec{\Gamma}(B) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{AB} - \omega^2 \vec{AB}$$

$$\vec{\Gamma}(B) = 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \theta'' \\ 2\ell & 0 & 0 \end{vmatrix} - \theta'^2 2\ell \cdot \vec{i}$$

$$\vec{\Gamma}(B) = -\theta'^2 2\ell \cdot \vec{i} + 2\theta'' \ell \vec{j}$$

أو من الاشتقاق المباشر مرتين للعلاقة :

$$\vec{o_1 B} = v \cdot t \vec{i}_1 + 2\ell \cdot \cos \theta \vec{i}_1 + 2\ell \cdot \sin \theta \vec{j}_1$$

6) إيجاد مركز التسارع المعلوم

إن النقطة  $A$  هي مركز التسارع المعلوم لأنها نقطة من المماسكة ينعدم تسارعها بالنسبة للجملة الثابتة .

7) تعيين نقطة من القضيب ذات السرعة الصغرى في اللحظة المذكورة

$$\vec{Ic} = \frac{1}{\omega^2} \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v}(c)$$

$$\vec{v}(c) = \vec{\omega} \wedge \vec{Ic}$$

إن السرعة الصغرى تقابل أقل بعد عن المركز الآني للدوران

إذا مركز القضيب  $c$  هي نقطة ذات سرعة أصغرى وهي أقل بعد عن المركز الآني للدوران  $I$  ويكون  $Ic \perp AB$  .

### مسألة من الكتاب صفحة (101) لم تحلها الدكتورة

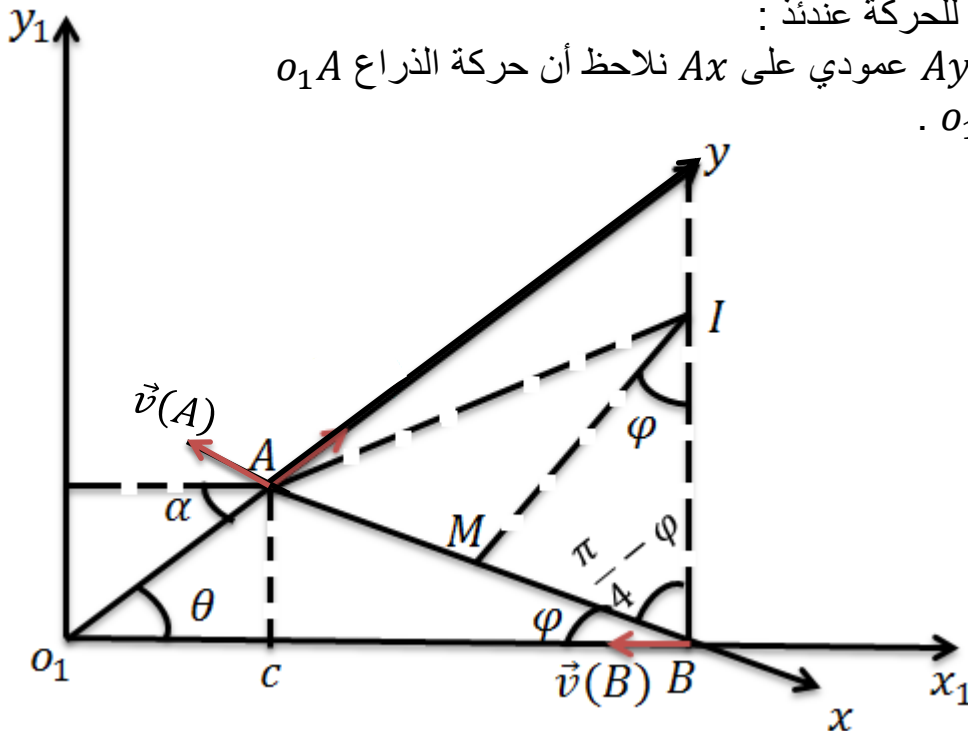
ذراع  $(o_1A)$  طوله  $(a)$  يدور في مستوي ثابت بسرعة زاوية ثابتة  $(\omega_1)$  حول النقطة الثابتة  $(o_1)$  ، إن ذراع  $(AB)$  طوله  $(2a)$  مرتبط مفصليا في  $(A)$  (أي بالذراع  $o_1A$ ) وتنزلق نهايته  $(B)$  على المستقيم الثابت  $(o_1x_1)$  ، والمطلوب :

- 1- معادلات حركة الذراع  $(AB)$  .
- 2- تعيين المركز الآني للدوران للذراع  $(AB)$  ثم تعيين القاعدة والمنتدحج .
- 3- تعيين سرعة وتسارع النقطة  $(B)$  .

الحل :

نختار النقطة  $(A)$  قطب للحركة عندئذ :

$Ax$  هو الذراع  $AB$  و  $Ay$  عمودي على  $Ax$  نلاحظ أن حركة الذراع  $o_1A$  حركة دائرية مركزها  $o_1$  .



**1- تعيين معادلات الحركة :**

النقطة  $O_1$  ، وبالتالي معادلات النقطة  $A$  في الجملة الثابتة هي :

$$A(x_A, y_A) = \begin{cases} x_A = a \cdot \cos \theta \\ y_A = a \cdot \sin \theta \end{cases}$$

ولكن حسب الفرض في نص المسألة  $\theta' = \omega_1 \Rightarrow \theta = \omega_1 \cdot t + \theta_0$  من شروط البدء  $t = 0$  و  $\theta = 0$  نجد أن  $\theta_0 = 0$  وبالتالي :  $\theta = \omega_1 t$  وبالتالي فإن :

$x_A = a \cdot \cos \omega_1 t$  ،  $y_A = a \cdot \sin \omega_1 t$   
في المثلث  $AC O_1$  يكون :  $Ac = a \cdot \sin \theta$  وفي المثلث  $ACB$  يكون :  $Ac = 2a \cdot \sin \varphi$  وبالتالي بالمطابقة :

$$a \cdot \sin \theta = 2a \cdot \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sin \theta}{2} \Rightarrow \varphi = \arcsin \left( \frac{\sin \theta}{2} \right) \dots (*)$$

$$\Rightarrow \varphi = \arcsin \left( \frac{\sin \omega_1 t}{2} \right)$$

وبالتالي معادلات الحركة هي :

$$x_A = a \cdot \cos \omega_1 t \quad , \quad y_A = a \cdot \sin \omega_1 t \quad , \quad \varphi = \arcsin \left( \frac{\sin \omega_1 t}{2} \right)$$

**2- تعيين المركز الآني للدوران :**

**أولاً :** بفرض إحداثيات المركز الآني للدوران في الجملة الثابتة هي  $I(x_1, y_1)$

(( سنقوم بتعيين المركز الآني هندسياً ويمكن تعيينه تحليلياً ))

$A$  تتحرك بشكل دائرة و  $B$  تتحرك على نفس المستقيم .

وبالتالي نأخذ مماس الدائرة على  $A$  ، ونأخذ العمود المماس في النقطة  $A$  ، ألا وهي النظيم .

$$\vec{AI} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}(A)}{\omega^2} \quad ; \quad \omega = \varphi'$$

$$x_1 = \vec{o_1 B} = \vec{o_1 c} + \vec{cB}$$

(\*) من

نلاحظ أن :  $o_1 c = a \cdot \cos \theta$  كما أن :  $cB = 2a \cdot \cos \varphi \cong 2a \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$

$$\Rightarrow cB = 2a \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{4}} = a \cdot \sqrt{4 - \sin^2 \theta}$$

$$x_1 = a \cdot \cos \theta + a \cdot \sqrt{4 - \sin^2 \theta} = a \cdot \cos \omega_1 t + a \cdot \sqrt{4 - \sin^2 \omega_1 t}$$

$$y_1 = BI = o_1 B \cdot \tan \theta = x_1 \cdot \tan \theta$$

$$y_1 = \left( a \cdot \cos \theta + a \cdot \sqrt{4 - \sin^2 \theta} \right) \cdot \tan \theta$$

$$y_1 = a \cdot \sin \omega_1 t + a \cdot \sqrt{4 - \sin^2 \omega_1 t} \cdot \tan \omega_1 t$$

وبالتالي احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة الثابتة هي :

$$I \left( a \cdot \cos \omega_1 t + a\sqrt{4 - \sin^2 \omega_1 t}, a \cdot \sin \omega_1 t + a\sqrt{4 - \sin^2 \omega_1 t} \cdot \tan \omega_1 t \right)$$

وهذه الاحداثيات تعين المعادلات الوسيطة للقاعدة .

لتعيين إحداثيات المركز الآني للدوران في الجملة المتماسكة ، وبفرض احداثيات المركز الآني للدوران

في الجملة المتماسكة هي :  $I(x(I), y(I))$  .

وبالتالي نقوم بما يلي :

$$x(I) = AM = AB - MB = 2a - IB \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right)$$

$$x(I) = 2a - y_1 \cdot \sin \varphi = 2a - y_1 \cdot \frac{\sin \theta}{2}$$

$$x(I) = 2a - \left( a \cdot \sin \theta + a\sqrt{4 - \sin^2 \theta} \cdot \tan \theta \right) \cdot \frac{\sin \theta}{2}$$

$$x(I) = 2a - \frac{a}{2} \left( \sin^2 \theta - \sqrt{4 - \sin^2 \theta} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \right)$$

$$x(I) = 2a - \frac{a}{2} \left( \sin^2 \omega_1 t - \sqrt{4 - \sin^2 \omega_1 t} \cdot \frac{\sin^2 \omega_1 t}{\cos \omega_1 t} \right) \dots (#)$$

$$y(I) = IM = IB \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = y_1 \cdot \cos \varphi$$

$$y(I) = \left( a \cdot \sin \theta + a\sqrt{4 - \sin^2 \theta} \cdot \tan \theta \right) \frac{\sqrt{4 - \sin^2 \theta}}{2}$$

$$y(I) = \frac{a}{2} \left( \sin \theta \cdot \sqrt{4 - \sin^2 \theta} + (4 - \sin^2 \theta) \cdot \tan \theta \right)$$

$$y(I) = \frac{a}{2} \left( \sin \omega_1 t \cdot \sqrt{4 - \sin^2 \omega_1 t} + (4 - \sin^2 \omega_1 t) \cdot \tan \omega_1 t \right) \dots (##)$$

إن (#) و (##) هي احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة المتماسكة

وهذه الاحداثيات تعين المعادلات الوسيطة للمتدرج .

**3- تعيين سرعة وتسارع النقطة (B) :**

عبارة شعاع الموضع للنقطة (B) في الجملة الثابتة هو :

$$\vec{o_1 B} = x_B \vec{i_1} + y_B \vec{j_1} = x_1 \vec{i_1}$$

$$\Rightarrow \vec{o_1 B} = \left( a \cdot \cos \omega_1 t + a\sqrt{4 - \sin^2 \omega_1 t} \right) \vec{i_1}$$

بالاشتقاق نحصل على السرعة :

$$\vec{V}(B) = -a \left( \omega_1 \cdot \sin \omega_1 t + \frac{\omega_1 \cdot \sin \omega_1 t \cdot \cos \omega_1 t}{\sqrt{4 - \sin^2 \omega_1 t}} \right) \vec{i_1}$$

بالاشتقاق مرة ثانية نحصل على التسارع :

$$\vec{r}(B) = -a\omega_1^2 \cdot \cos \omega_1 t + a \frac{(-\omega_1^2 (\cos^2 \omega_1 t - \sin^2 \omega_1 t) \cdot \sqrt{4 - \sin^2 \omega_1 t})}{4 - \sin^2 \omega_1 t}$$

$$-a \left( \frac{\left( \frac{\omega_1 \cdot \sin \omega_1 t \cdot \cos \omega_1 t}{\sqrt{4 - \sin^2 \omega_1 t}} \right) (\omega_1 \cdot \sin \omega_1 t \cdot \cos \omega_1 t)}{4 - \sin^2 \omega_1 t} \right)$$

**مسألة وظيفة من المحاضرة العاشرة**

صفحة دائرية مركزها (o) ثابت نصف قطرها (a) تستند بنقطة (A) من محيطها إلى مستوي ثابت  $(ox_1y_1)$  ، والمطلوب :

**1** عين الإحداثيات المعممة للصفحة ، وشعاع الدوران الآني بدلالة هذه الإحداثيات ومشتقاتها بالنسبة للزمن .

**2** بفرض أن نقطة التماس (A) تدور حول المحور  $(o_1z_1)$  بسرعة قيمتها  $\vec{v}(A) = \frac{\sqrt{3}}{2}t$  وقيمة شعاع الدوران  $|\vec{\omega}| = 1$  ، عين معادلات حركة الصفحة ثم عين سرعة نقطة ما من الصفحة وتساوعها .

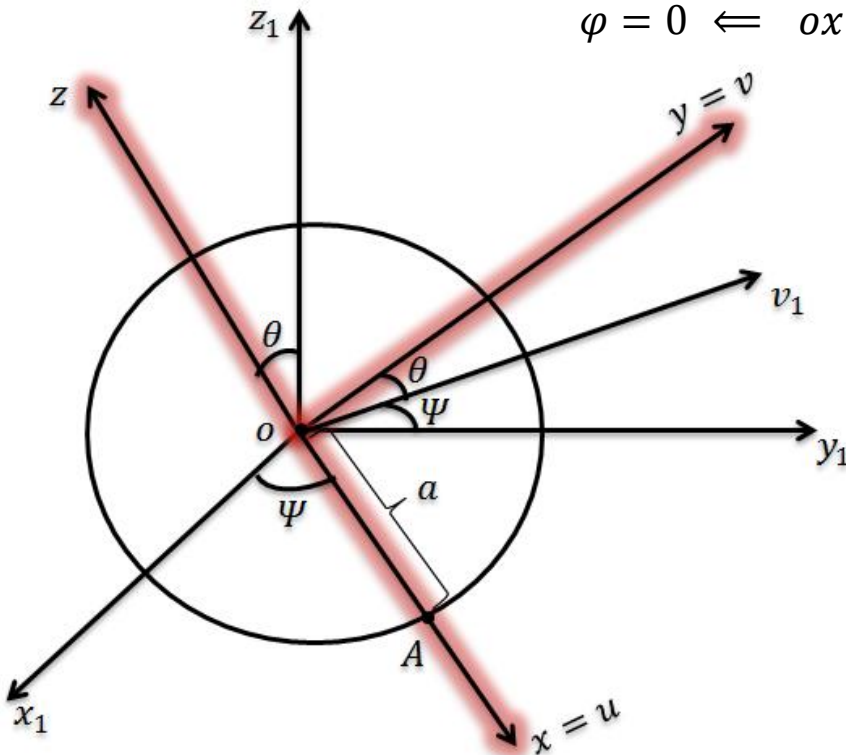
**3** بفرض ان الصفحة تتدرج دون انزلاق على المستوي  $(ox_1y_1)$  ، عين المحور الآني للدوران والقاعدة والمتدرج .

**الحل :**

oA ملازمة للمستوي  $x_1oy_1$  ، لدينا ضلع من المماسكة ملازم للمستوي الثابت

عندئذ يكون oA منطبق على  $ox = ou \iff \varphi = 0$

وبالتالي وسطاء الحركة هي  $\theta, \Psi$  وبالتالي أصبح لدينا درجتين من الحرية



نختار احداثيات  $A(a, 0, 0)$

$$\vec{\omega} = \psi' \vec{k}_1 + \theta' \vec{u} + \varphi' \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \psi' \vec{k}_1 + \theta' \vec{u}$$

في جملة الثانية :

$$\vec{\omega} = \psi' \vec{k}_1 + \theta' (\cos \psi \vec{i}_1 + \sin \psi \vec{j}_1)$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \theta' \cdot \cos \psi \vec{i}_1 + \theta' \cdot \sin \psi \vec{j}_1 + \psi' \vec{k}_1$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}(\theta' \cdot \cos \psi, \theta' \cdot \sin \psi, \psi')$$

في جملة متماسكة :

$$\vec{\omega} = \psi' \vec{k}_1 + \theta' \vec{u}$$

$$\vec{k}_1 = \cos \theta \vec{k} + \sin \theta \vec{j}, \vec{u} = \vec{i}, \vec{j} = \vec{v}$$

$$\vec{\omega} = \theta' \vec{i} + \psi' \cdot \sin \theta \vec{j} + \psi' \cdot \cos \theta \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}(\theta', \psi' \cdot \sin \theta, \psi' \cdot \cos \theta)$$

ايجاد معادلات الحركة :  $(\psi, \theta)$

لدينا :  $\vec{v}(A) = \frac{\sqrt{3}}{2} t$

$$\vec{v}(A) = \vec{\omega} \wedge \vec{OA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \theta' & \psi' \sin \theta & \psi' \cos \theta \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(A) = a \cdot \psi' \cdot \cos \theta \vec{j} + (-a \cdot \psi' \cdot \sin \theta) \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(A) = a \cdot \psi' (\cos \theta \vec{j} - \sin \theta \vec{k})$$

بتعويض قيمة السرعة مع التربيع :

$$\frac{3}{4} t^2 = a^2 \psi'^2 \Rightarrow \psi'^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{t^2}{a^2} \Rightarrow \psi' = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{t}{a}$$

بالمكاملة نجد :

$$\psi = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{t^2}{a} + \psi_0$$

في بداية الحركة  $t = 0, \psi = 0$  وبالتالي  $\psi_0 = 0$

$$\Rightarrow \psi = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{t^2}{a}$$

لدينا :  $|\vec{\omega}| = 1$

$$\vec{\omega} = \theta' \vec{i} + \psi' \cdot \sin \theta \vec{j} + \psi' \cdot \cos \theta \vec{k}$$

بتربيع

$$\Rightarrow |\vec{\omega}|^2 = \theta'^2 + \psi'^2 \cdot \sin^2 \theta + \psi'^2 \cdot \cos^2 \theta$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\vec{\omega}|^2 &= \theta'^2 + \psi'^2 \\ \Rightarrow 1 &= \theta'^2 + \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{t^2}{a^2}\right) \Rightarrow 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{t^2}{a^2} = \theta'^2 \\ \Rightarrow \theta' &= \sqrt{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{t^2}{a^2}} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{t^2}{a^2}} \Rightarrow \theta = \int \sqrt{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{t^2}{a^2}} dt \\ dt &= -\frac{2}{\sqrt{3}} a \cdot \sin u \, du \text{ ومنه } t = \frac{2}{\sqrt{3}} a \cdot \cos u \text{ نفرض} \\ \Rightarrow \theta &= -\frac{2}{\sqrt{3}} a \cdot \int \sin u \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{4a^2}{3a^2} \cdot \cos^2 u} \, du \\ \Rightarrow \theta &= -\frac{2}{\sqrt{3}} a \cdot \int \sin u \cdot \sin u \cdot du \\ \Rightarrow \theta &= \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \int -\sin^2 u \cdot du \Rightarrow \theta = \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \int \frac{(\cos 2u - 1)}{2} \cdot du \\ \Rightarrow \theta &= \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \sin 2u - u \right] \dots (*) \end{aligned}$$

بتعويض  $u = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2a} t$  في (\*) نجد :

$$\theta = \frac{a}{\sqrt{3}} \left[ \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \arccos \left( \frac{\sqrt{3}}{2a} t \right) - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2a} t \right]$$

في الجملة المتماسكة : لدينا :  $\vec{OM} \parallel \vec{\omega}$  و بفرض  $M(x, y, z)$

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$$

$$\frac{x}{\theta'} = \frac{y}{\psi' \cdot \sin \theta} = \frac{z}{\psi' \cdot \cos \theta}$$

من (1) و (2)

$$\theta' \cdot y = x \psi' \cdot \sin \theta$$

من (1) و (3)

$$\theta' \cdot z = x \psi' \cdot \cos \theta$$

بالتربيع والجمع نجد :

$$\theta'^2 (y^2 + z^2) = x^2 \psi'^2$$

وبتعويض قيمة كل من  $\psi', \theta'$  نجد :

$$1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{t^2}{a^2} (y^2 + z^2) = x^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{t^2}{a^2}$$

وهي معادلة المتدرج .  
في الجملة الثابتة :  $\vec{\omega} \parallel \vec{o_1M}$

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{y_1}{q_1} = \frac{z_1}{r_1}$$

$$\frac{x_1}{\theta' \cdot \cos \psi} = \frac{y_1}{\theta' \cdot \sin \psi} = \frac{z_1}{\psi'}$$

من (1) و (3)

$$\psi' x_1 = z_1 \theta' \cdot \cos \psi$$

من (2) و (3)

$$\psi' y_1 = z_1 \theta' \cdot \sin \psi$$

بالتربيع والجمع نجد :

$$\psi' (x_1^2 + y_1^2) = z_1^2 \theta'^2$$

وبتعويض قيمة  $\theta', \psi'$  نجد :

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{t^2}{a^2} (x_1^2 + y_1^2) = z_1^2 \left( 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{t^2}{a^2} \right)$$

وهي معادلة القاعدة .

إيجاد سرعة نقطة ما من الصفيحة ولتكن (A) بحيث  $A(a, 0, 0)$   
نوجد السرعة بجملة متماسكة :

$$\vec{v}(A) = \vec{\omega} \wedge \vec{oA} \Rightarrow \vec{v}(A) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \theta' & \psi' \sin \theta & \psi' \cos \theta \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(A) = a \cdot \psi' \cdot \cos \theta \vec{j} + (-a \cdot \psi' \cdot \sin \theta) \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(A) = (0, a \cdot \psi' \cdot \cos \theta, -a \cdot \psi' \cdot \sin \theta)$$

لإيجاد التسارع نستخدم العلاقة التالية :

$$\vec{\Gamma}(A) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{oA} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(A)$$

لدينا شعاع الدوران

$$\vec{\omega} = (\theta', \psi' \sin \theta, \psi' \cos \theta)$$

نشتق السرعة الزاوية في المتماسكة :

$$\vec{\varepsilon} = (\theta'', \psi'' \cdot \sin \theta + \theta' \psi' \cdot \cos \theta, \psi'' \cdot \cos \theta - \theta' \psi' \cdot \sin \theta)$$

ومنه بتعويض كل من  $\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}, \vec{v}(A)$  بعلاقة التسارع للنقطة (A) نجد :

