معك نحو

التخرج

Syria Math Team

Syria Math

السنة الثانية

التحليل3

المحاضرة 2 (عملي)

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل:

هاتف – واتساب: 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2nd year

عملي

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة : الثانية

◄ عنوان المحاضرة:

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- مبرهنتان
2- نتائج
3- مثال

تمرين : بين فيما إذا كان تقارب المتتالية التالية منتظماً أم غير منتظم مع التبرير !

$$\{f_n(x)\} \quad : f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \quad : x \in [0,1]$$

الحل :

بداية نلاحظ أن :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

كما أننا نلاحظ أن التوابع $f_n(x)$ تعطى تفصيلاً بالشكل :

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} = \frac{x}{1-2nx+n^2x^2+2nx} = \frac{x}{(1-nx)^2+2nx}$$
$$= \frac{1}{2n}\frac{2nx}{(1-nx)^2+2nx} \leq \frac{1}{2n}\frac{2nx}{2nx} = \frac{1}{2n}$$

نحذف مقدار من المقام فيكبر الكسر

عندها يكون $sup f_n(x) = \frac{1}{2n}$:

$$\sup_{x\in I} f_n(x) = \frac{1}{2n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0$$

فالتقارب منتظم ☺

طريقة ثانية : بدراسة تغيرات التابع $g(x) = \sup|f_n(x) - 0| = sup\,\frac{x}{1+n^2x^2}$ و بملاحظة أن مشتقه :

$$\frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}$$

و الذي ينعدم عند $\pm\frac{1}{\mathrm{n}}$ (ضمن مجالنا نقبل $\frac{1}{\mathrm{n}}$) فنحصل على جدول تغيرات :

x	0		$\frac{1}{n}$		1
$g'(x)$	0	+ + + + +	0	- - - - - - - - - - - -	
$g(x)$	0	↗ ↗ ↗	$\frac{1}{2n}$	↘ ↘ ↘	$\frac{1}{1+n^2}$

فأكبر قيمة يبلغها التابع هي $\frac{1}{2n}$ إذاً :

$$\sup|f_n(x) - 0| = \frac{1}{2\mathrm{n}} \to 0$$

فالتقارب منتظم.

تمرين :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2} \qquad ; \;\; I = [0,1]$$

تابع النهاية:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1 + n^2x^2} = 0$$

لأن درجة البسط أصغر من درجة المقام.

$$\lim_{n\to\infty} \sup|f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup\left|\frac{nx}{1 + n^2x^2}\right| \quad ; \quad x \in [0,1]$$

عندما $x = \frac{1}{n}$ نلاحظ أن $f_n(x)$ يبلغ نهاية عظمى وقيمته عند هذه النقطة هي $\frac{1}{2}$

إذاً:

$$\lim_{n\to\infty} \sup\left|\frac{nx}{1 + n^2x^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 \quad ; \quad x \in [0,1]$$

ذلك أن :

$$\frac{nx}{1+n^2x^2}=\frac{nx}{1-2nx+n^2x^2+2nx}=\frac{1}{2}\frac{2nx}{(1-nx)^2+2nx}\le\frac{1}{2}\frac{2nx}{2nx}=\frac{1}{2}$$

و يمكن الحل بطريقة دراسة التغيرات كما مر في المثال السابق : فتجد أن جدول التغيرات :

x	0		$\frac{1}{n}$		1
$g'(x)$	0	$+ + + + +$	0	$- - - - - - - - - - -$	
$g(x)$	0	$\nearrow\ \nearrow\ \nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow\ \searrow\ \searrow$	$\frac{n}{1+n^2}$

وبالتالي:

$$\sup|f_n(x)-0|=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}\neq 0$$

فالتقارب غير منتظم

تمرين :

$$f_n(x)=\frac{1}{1+x^{2n}}\ :\ I=[0,1]$$

$$f(x)=lim f_n(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ \frac{1}{2} & x=1\end{cases}$$

نلاحظ أن تابع النهاية غير مستمر و المتتالية ذات حدود مستمرة فالتقارب غير منتظم .

تمرين :

$$f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}\qquad I=[0,\infty[$$

$$f(x)=\lim f_n(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ \frac{1}{2} & x=1\\ 1 & x>1\end{cases}$$

أيضاً تابع النهاية غير مستمر و المتتالية ذات حدود مستمرة فالتقارب غير منتظم هنا

تمرين :

$$f_n(x) = \frac{\arctan(x^n)}{n} \quad x \in R$$

$$(\text{نهاية شهيرة}) \qquad lim f_n(x) = 0 = f(x)$$

$$|f_n(x) - 0| = \left|\frac{\arctan(x^n)}{n} - 0\right| \leq \frac{\pi}{2n}$$

$$\sup|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\pi}{2n} \to 0$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq artan(t) \leq \frac{\pi}{2}$$

و بالتالي بأخذ القيمة المطلقة و التقسيم على n

$$0 \leq \frac{|\arctan(x^n)|}{n} \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{n}$$

فالتقارب منتظم

تمرين :

$$f_n(x) = \frac{sinnx}{\sqrt{n}} \quad x \in R$$

$$lim f_n(x) = 0$$

$$|f_n(x) - 0| = \left|\frac{sinnx}{\sqrt{n}} - 0\right| = \left|\frac{sinnx}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sup|f_n(x) - 0| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$

فالتقارب منتظم

تمرين : $f_n(x) = x^2 + \frac{\sin(x+\frac{\pi}{2})}{n}$

$$f(x) = lim f_n(x) = x^2$$

$$|f_n(x) - x^2| = \left|\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \to 0 \quad \Rightarrow \sup|f_n(x) - f(x)| \to 0$$

فالتقارب منتظم