معك نحو

التخرج

Syria Math Team

التحليل التابعي1

المحاضرة 13

السنة الثالثة

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154د

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 3rd year

◄ دكتور المادة: جمال مللي

◄ المحاضرة: الثالثة عشر   عنوان المحاضرة: الفضاءات المنظمة

مبرهنة بعد الفضاء الجزئي

إذا كان X فضاء متجهي بعده n، فإن لكل فضاء جزئي فعلي Y من X بعدا أصغر من n

الإثبات :

نميز ثلاث حالات :

1- إذا كان $n = 0$ أي $\dim X = 0 \Leftarrow X = \{0\}$ الفضاء الصفري في هذه الحالة ليس لهذا الفضاء فضاء جزئي فعلي ((لكن له فضاء جزئي هو الفضاء نفسه))

2- إذا كان $\dim y = n$ فإن $Y = \{0\}$ وبالتالي $Y \neq X$، وكون Y هو فضاء جزئي فعلي من X فإنه يوجد على الأقل عنصر من X لا ينتمي إلى Y أي أنه : $\dim X \geq 1$

$$\dim Y = 0 \implies \dim Y \leq \dim X = n$$

3- لنفرض أن $\dim Y = 0$ ، فإنه يوجد ل Y قاعدة مؤلفة من عناصر عددها n و هذه القاعدة لا بد أن تكون قاعدة للفضاء X نظرا لأن $\dim X = n$ ، وفي هذه الحالة يتطابق الفضاءات لأنه لدينا تعريفا كون Y جزئي من X فإن $Y \subseteq X$ وأيضا لو أخذنا $x \in X$ فإنه كون X فضاء شعاعي فإن x يكتب على شكل تراكيب بدلالة n عنصر مستقل إذن $Y \subseteq X$

أي أن $X = Y$ و هذا مرفوض لأن Y فضاء جزئي فعلي من X أي يوجد على الأقل عنصر موجود في x ليس موجود في Y ومما سبق نستنتج أن : $\dim Y \leq n$.

تعريف الفضاء المنظم :

يسمى هذا الفضاء أيضا بالفضاء المتجهي المنظم أو الفضاء الخطي المنظم ، X هو فضاء متجهي مزود بنظيم .

تعريف فضاء بانخ : هو فضاء منظم تام

والنظيم على فضاء متجهي هو دالة حقيقية على X يرمز لقيمتها في نقطة x من X بالشكل $||x||$: بحيث يحقق الخواص التالية :

$$1)\quad ||x|| \geq 0$$

$$2)\quad ||x|| = 0_R \Leftrightarrow x = 0_R$$

$$3)\quad ||\alpha x|| = |\alpha|||x|| \;\; ; \; \alpha \in K$$

$$4)\quad ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

يمثل yو x متجهين كيفين من X أما α فتمثل عدد ما .

ويحدد النظيم على X مترك dعلى X وفق المساواة : $\mathrm{d(x,y) = ||x-y||}$

يسمى هذا المترك المترك المولد بالنظيم يرمز للفضاء المتري الذي عرفناه بالشكل $(x\ ,||.||)$

لنثبت أن dهو تابع مسافة أي يحقق الشروط التالية :

$\mathrm{1)d(x,y) = ||x-y|| \geq 0}$ لأن القيمة المطلقة دالة موجبة

$$\mathrm{2)d(x,y) = ||x-y|| = ||y-x|| = d(y,x)}$$

$$\mathrm{3)d(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow ||x-y|| = 0 \Leftrightarrow x = y}$$

$$\mathrm{4)d(x,y) = ||x-y|| = ||x-z+z-y|| \leq ||x-z|| + ||z-y||}$$

$$\mathrm{= d(x,z) + d(z,y) \Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)}$$

تحقق متراجحة المثلث وبالتالي مما سبق نجد أن d مترك وبالتالي أثبتنا أن كل نظيم يولد مترك وفق المساواة التالية .

<u>تمرين :</u>

وليكن $c[a,b]$ و ساحة قيمها $\mathbb{R}$ أو جزء منها ولنعرف الدالة

$$||.|| \;: c[a,b] \to R$$

$$x \to ||x|| = \max|x(t)| \;, a \leq t \leq b$$

إن الفضاء $c[a,b]$ مزود بالعمليتين التاليتين :

$$\forall x, y \in c[a,b]$$

$$1-(x+y)(t)=(x)(t)+(y)(t)$$

$$2-(\alpha x)(t)=\alpha(x)(t)\ ;\ \alpha\in R$$

أثبت أن $(x, y \in c[a,b], +, .)$فضاء مظم

<u>الحل :</u>

يجب علينا أن نثبت أن الدالة ||.|| المعرفة عليه هي دالة نظيم وتحقق الشروط الأربعة علما أن $c[a,b]$ فضاء متجهي (شعاعي)

1- واضح $||.|| = Max|x(t)| \geq 0$

2- $||x|| = 0_k \Leftrightarrow \max|x(t)| = 0 \Leftrightarrow |x(t)| = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0$

أيا كان $t \in [a\,, b\,]$ فإن الدالة xستصور النقطة بالصفر إذا x هي الدالة الصفرية

3- $||\alpha\, x\,|| = max\ |\ \ |(\alpha x)(t)|| = \max|\alpha(x)(t)| = \max|\,\alpha||\,x(t)|$

كون عدد حقيقي ثابت فهو محقق

4- $||\mathrm{x}-\mathrm{y}|| = \max|\,(x+y)(t)| = \max|x(t)+y(t)| \Rightarrow$

$$|x(t)+y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)|$$

$$\mathrm{x(t)} \leq \max|x(t)|$$

$$\mathrm{y(t)} \leq \max|y(t)|$$

$$|x(t)+y(t)| \leq \max|x(t)| + \max|y(t)|$$

أي أن الطرف الأيمن يمثل حد أعلى للطرف الأيسر ولكن $\sup|x(t)+y(t)|$ هو أصغر الحدود العليا وبما أن المجال مغلق والsup ينطبق علىmax يكون لدينا

$$max|(x+y)(t)| \leq \max|x(t)| + \max|y(t)|$$

$$\Rightarrow ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

وبالتالي محقق .

<u>ملاحظة :</u> إن الفضاءات المنظمة هي حالة خاصة من الفضاءات المترية

استنتج الخاصة التالية :

$$\left|\, ||x|| - ||y|| \,\right| \leq ||x-y||$$

استنادا على متباينة المثلث في خواص النظيم :

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

<u>الحل :</u>

$$x = x + y - y$$

$$||x|| = ||x + y - y||$$

$$\Longrightarrow ||x|| \leq ||y|| + ||x-y|| \Longrightarrow$$

$$1 \;\ldots.. ||x|| - ||y|| \leq ||x-y||$$

ومن جهة أخرى :

$$y = y + x - x$$

$$||y|| = ||y + x - x||$$

$$\Longrightarrow ||y|| \leq |x| + ||y-x|| \Longrightarrow$$

$$2 \;\ldots.. ||y|| - ||x|| \leq ||y-x||$$

ومن 1 و 2 نجد أن :

$$\left|\, ||x|| - ||y|| \,\right| \leq ||x-y||$$

<u>مبرهنة :</u>

إن النظيم هو تطبيق مستمر أي أن $||x|| \longmapsto x$هو تطبيق مستمر للفضاء $(x\,,||.||)$في R

- إن دالة النظيم هي دالة مستمرة على ساحة التعريف دوما

تذكرة :

نقول عن مجموعة أنها مستمرة اذا كانت مستمرة عند كل نقطة من نقاطها

تمرين :

أثبت أن دالة المعرفة كالتالي :

$$||.||: X \longrightarrow R^*$$
$$x \longmapsto ||x||$$

هي دالة مستمرة بلغة ε , ξ

الحل :

لتكون الدالة $||.||$ مستمرة عند النقطة $x_0 \in X$ من ساحة التغريف في R

يجب أن يتحقق الشرط :

$$\forall \varepsilon > 0 \,; \exists \delta = \varepsilon : ||x - x_0|| < \delta$$
$$\rightarrow \big|\, ||x|| - ||x_0|| \,\big| \leq ||x - x_0|| < \varepsilon$$

ويتم المطلوب بالاعتماد على الخاصة :

$$|\,||x|| - ||x_0||| \leq |x - x_0|$$

وباختيار $\delta = \varepsilon$

الفضاء المنظم يقسم إلى :

1- الفضاء المنظم التام
2- الفضاء المنظم غير التام

الفضاء المنظم التام (فضاء باناخ):

نقول عن الفضاء أنه تام إذا كان تاما بخصوص المترك المولد من هذا النظيم (لأن كل نظيم يولد مترك))

الأمثلة : $R^n , \ell^\infty , \ell^p$ تام بخصوص المترك الأقليدي المعرف عليه .

وكذلك $c[a,b]$ تام بخصوص المترك المعرف عليه

$$d(x,y) =: Max\,|x(t) - y(t)|$$

الفضاء المنظم غير التام :

نقول عن فضاء منظم أنه غير تام بخصوص المترك المولد من هذا النظيم عندها نقول عن الفضاء أنه غير تام

الأمثلة : $c[a,b]$ غير تام بخصوص المترك المعرف عليه $d(x,y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|dt$

ملاحظة :

لابد من الإشارة إلى أن كل فضاء منظم غير تام يمكن أتمامه كما في الفضاءات المترية غير التامة .

تعريف المجموعة المحدبة :

نقول عن مجموعة A جزئية من فضاء متجهي X إنها محدبة إذا اقتضى وقوع أي نقطتين x,y من من A تحقق العلاقة: $H=\{Z\in X\,;Z=ax+(1-a)y \quad ; \ 0\le a\le 1\}\ \subset A$

تدعى M قطعة مستقيمة مغلقة حداها النقطتان x,y وتدعى كل نقطة أخرى من Z نقطة داخلية في M

مثال على فضاء منظم وغير تام :

ليكن لدينا الفضاء $c[a,b]$ فضاء الدوال المستمرة على المجال المغلق $[a,b\ ]$ ولنزوده بالدالة التالية :

$$||.||: c[a,b]\to R$$

$$x\to ||x||=\left(\int_a^b x(t)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

ولثبت أن ||.|| هي دالة نظيم .

الحل : لنتحقق من الشروط الأربعة التالية :

$$\forall x,y\in c[a,b] \quad ; \ \forall a\in R$$

$$1-||x||=\left(\int_a^b x(t)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\ge 0$$

$$2 - \|x\| = 0 \iff \left(\int_a^b x(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \iff |x(t)| = 0 \iff$$

$$x(t) = 0 \iff x(t) = 0 \iff x = 0$$

دالة تصور جميع النقط بالصفر (الدالة الصفرية) محقق .

$$3 - \|\alpha x\| = \left(\int_a^b (\alpha x(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b (\alpha)^2 (x(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{a^2} \left(\int_a^b x(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \left(\int_a^b x(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \, \|x\|$$

$$4 - \|x + y\| = \left(\int_a^b (x + y)(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b (x(t) + y(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

ولدينا حسب متراجحة فيكوفسكي من أجل $p = 2$ نجد :

$$\left(\int_a^b (x(t) + y(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b x(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b y(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

إذن تحقق الشروط الأربعة ومنه فإن $\|.\|$ هي دالة نظيم على الفضاء المتجهي $c[a,b]$.

وبالتالي فإن $(c[a,b] \,, \|.\|)$ هو فضاء منظم ولكنه غير تام لأنه غير تام بخصوص المترك المولد من هذا النظيم .

$$d(x,y) = \|x - y\| = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

ولإثبات أنه غير تام يمكن اتباع خطوات البرهان الوارد في المحاضرة8 حيث يستعاض من المترك السابق بالمترك الحالي وأيضاً باستبدال المجال $[0,1]$ بالحالة العامة $[a,b]$ بنفس الخطوات نستطيع إيجاد كوشية غير متقاربة ضمن هذا المجال ونهاية هذه المتتالة الكوشية هي دالة قابلو للمكاملة ولكنها غير مستمرة إذاً هذه الكوشية غير متقاربة ضمن هذا الفضاء .

وبالتالي الفضاء غير تام بخصوص المترك المعرف عليه .

تعريف الفضاء الجزئي المنظم : ليكن لدينا $(X , ||.||)$ فضاء منظم وليكن $\emptyset \neq Y \subseteq X$ عندئذ فإن Y سوف يكون فضاء متجهي فإذا زودنا Y بمقصور النظيم المعرف على X نحصل على فضاء منظم جديد نسميه فضاء جزئي منظم وفي حال كانت المجموعة Y مغلقة في X عندها نقول أنه فضاء جزئي منظم مغلق .

فضاء باناخ : هو كل فضاء منظم و تام .

ملاحظة : إن كل فضاء منظم هو فضاء متري ((أي أن كل نظيم يولد مترك))

مبرهنة الفضاء الجزئي من فضاء باناخ :

الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء جزئي Y من فضاء باناخ X تاماً هو أن تكون المجموعة Y مغلقة في X .

الإثبات :

بما أن، كل فضاء منظم هو فضاء متري وحسب الملاحظة ((كل نظيم يولد مترك)) وحسب مبرهنة سابقة في الفضاءات المترية ((إذا كان الفضاء الكلي تاماً الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء الجزئي تام هو أن تكون الجزئية مغلقة))

ومنه Y تام $\Leftrightarrow$ Y مغلقة .   ويتم المطلوب .

انتهت المحاضرة

إعداد: رولا الشيخ وتقى إسماعيل وبسمة نصر الله