معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثانية

التحليل3

المحاضرة 11و12و13

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 3rd year

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: العاشرة

◄ عنوان المحاضرة: متسلسلات التوابع

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- متسلسلات القوى
2- طرق إيجاد منطقة التقارب

متسلسلات التوابع

نتائج :

1- حدود متسلسلة القوى معرفة و مستمرة و قابلة للاشتقاق على مجال تقاربها
2- كل متسلسلة قوى مثل $\sum c_n(x-a)^n$ متقاربة من أجل المركز $x=a$
3- يمكن رد أي متسلسلة قوى مركزها a مثل $\sum c_n(x-a)^n$ إلى متسلسلة قوى مركزها $x=0$ و ذلك بوضع $y=x-a$

➢ملاحظة: سنقوم بدراسة كل ما يخص متسلسلات القوى على المتسلسلات التي مركزها الصفر و ذلك لأن حسب النتيجة الأخيرة يمكن رد أي متسلسلة قوى إلى متسلسلة قوى مركزها الصفر

مبرهنة :

لتكن $\sum c_n x^n$ متسلسلة قوى معرفة على I :

1- إذا كانت هذه المتسلسلة متقربة من أجل قيمة معينة $x=x_0\neq 0$ فإنها تتقارب من أجل جميع قيم x التي تحقق المتراجحة : $|x|<|x_0|$ و التي تكافئ أن :

$$-|x_0|<x<|x_0| \Longrightarrow x\in]-|x_0|,|x_0|[$$

و من ثم ندرس المتسلسلة عند طرفي المجال و ذلك لنتبين فيما إذا كان إحدى طرفي المجال أو كلاهما ينتمي إلى مجال التقارب أم لا

2- إذا كانت المتسلسلة $\sum c_n x^n$ متباعدة من أجل قيمة معينة $x=x_0\neq 0$ فإنها تتباعد من أجل جميع قيم x التي تحقق المتراجحة : $|x|>|x_0|$ و التي تكافئ أن :

$$x>|x_0| \quad or \quad x<-|x_0| \quad \Longrightarrow x\in]-\infty,-|x_0|[U]|x_0|,+\infty[$$

نتيجة : إذا كان $\rho = 0$ فإن مجال تقارب المتسلسلة $\sum c_n(x-a)^n$ هو $[a, a]$ أي هي متقاربة فقط عند المركز و يمكن أن نصطلح أنه إذا كان $\rho = 0$ فنقول عن المتسلسلة أنها متباعدة.

خلاصة: لأي متسلسلة قوى $\sum c_n x^n$ لها ثلاث حالات :

1- إذا كان مجال تقارب المتسلسلة $]-\infty, \infty[$ فإن نصف قطر تقاربها $\rho = +\infty$
2- إذا كان مجال تقارب المتسلسلة هو I فإن المتسلسلة تكون متقاربة فقط داخل المجال و متباعدة عند كل نقطةٍ x من $R - I$
3- إذا كانت متقاربة فقط عند المركز $x = 0$ و متباعدة فيما عدا ذلك فإن $\rho = 0$

طرق إيجاد نصف قطر التقارب:

يمكن استعمال اختبار دالامبير أو اختبار الجذر النوني كما يأتي:

دالمبير :

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ متسلسلة قوى بحيث أن $c_n \neq 0$ من اجل جميع قيم $n \geq 0$

وبفرض وجود النهاية $D = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ ومن ثم:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}.\,x^{n+1}}{c_n.\,x^n}\right| = |x|.D$$

و لناقش ما يلي : حتى تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ متقاربة حسب معيار دالمبير يجب أن تكون قيمة النهاية السابقة أصغر من الواحد أي : $|x|.D$ و لنميز الحالات التالية :

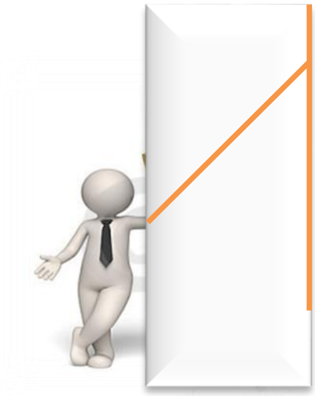
1- إذا $D = 0$ فنجد أن : $|x|.D = 0 \;\; \forall x \in R$ فتكون متقاربة و مجال تقاربها هو $R =]-\infty, +\infty[$ و نصف قطر التقارب هنا $\rho = +\infty$
2- إذا كان $D \neq 0$ فتتقارب المتسلسلة عندما و فقط عندما $|x|.D < 1$ و هذا يكافئ :

$$-\frac{1}{D} < x < \frac{1}{D}$$

و بالتالي يكون مجال التقارب في هذه الحالة $]-\frac{1}{D}, \frac{1}{D}[$ و نصف قطر التقارب هو $\rho = \frac{1}{D}$

3- أما إذا كان $|x|.D > 1$ فتكون المتسلسلة متباعدة

4- في حالة $D = +\infty$ عندئذٍ تكون المتسلسلة متباعدة من أجل جميع قيم $x \in R^*$ و متقاربة فقط عند المركز $x = 0$



خلاصة : يمكن حساب نصف قطر أي متسلسلة قوى بالاستفادة من معيار دالمبير من العلاقة :

$$\square = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \frac{1}{D}$$

((تحقق أن هذه العلاقة تحقق الحالات السابقة كلها))

كوشي : لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ متسلسلة قوى بحيث أن $c_n \neq 0$ من اجل جميع قيم $n \geq 0$

وبفرض وجود النهاية $C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ ومن ثم:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |x| C$$

و نناقش نفس الحالات السابقة و نخلص إلى أن : $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{C}$

ملاحظة هامة :

قبل البدء بدراسة أي متسلسلة قوى و تطبيق أي معيار يجب أن نأخذ سلسلة القيم المطلقة و نطبق عليها دراستنا لأنه و كما نعلم أن جميع المعايير السابقة تنطبق على المتسلسلات ذات الحدود الموجبة .

أمثلة :

أوجد منطقة التقارب لكل من متسلسلات القوى الآتية:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{n} . x^n$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1$$

مجال تقارب المتسلسلة $]-1,1[$ ((حسب القاعدة $]a-\rho, a+\rho[$))

➢ندرس التقارب عند $x = 1$ يتم الحصول على المتسلسلة المتباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

➢وعندما $x = -1$ يتم الحصول على المتسلسلة المتقاربة شرطياً $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

سبب أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة شرطياً:

$\sum \frac{1}{n}$ متباعدة. نطبق معيار ليبنتز:

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

2) $a_n \le a_{n+1} \Leftarrow \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n} \Leftarrow \frac{1}{n}$ متناقصة ومنه $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة $\Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة شرطياً.

إذاً فمنطقة التقارب لهذه المتسلسلة هي $[-1,1[$

وكما قلنا سابقاً مغلق عند -1 لأنه متقارب شرطياً عندها.

2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.x^n$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1).n!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty$$

مجال التقارب هو $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

3) $$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}.x^n$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n-1)}{n(n-2)} = 1$$

مجال التقارب هو $]-1,1[$

ندرس تقارب المتسلسلة عند طرفي المجال:

➢ عندما $x = 1$ يتم الحصول على المتسلسلة $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}$

و متقاربة فهي متقاربة بإطلاق ما يلي :

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}\right| = \frac{1}{n(n-2)}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad , \quad b_n = \frac{1}{n(n-2)}$$

نطبق معيار نهاية النسبة:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(n-2)}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2-2n} = 1$$

المتسلسلتين من نوع واحد وحسب معيار نهاية النسبة ولأن:

$$\sum\frac{1}{n^2}$$

متقاربة.

وبالتالي $\sum\frac{1}{n(n-2)}$ متقاربة

ومنه:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}$$

متقاربة بإطلاق عند $x = 1$.

- عندما $x = -1$ يتم الحصول على المتسلسلة

$$\sum_{n=3}^{\infty}c_n.x^n = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}.(-1)^n = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n(n-2)} = -\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)}$$

وهي متقاربة وبالتالي مجال التقارب هو $[-1,1]$

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n(5^n+1)}$$

مركزها $a = -2$

بفرض $y = x + 2$ تأخذ هذه المتسلسلة الشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n(5^n + 1)} \qquad \dots \qquad (*)$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(5^n + 1)} \cdot \frac{(n+1)(5^{n+1} + 1)}{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} + 1}{5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{5^n\left(5 + \frac{1}{5^n}\right)}{5^n\left(1 + \frac{1}{5^n}\right)}$$

$$= 1 \times 5 = 5$$

فمجال التقارب للمتسلسلة $I =]-5,5[$

➢ولكن عندما $y = 5$ يتم الحصول من المتسلسلة $(*)$ على المتسلسلة المتباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(5^n + 1)}$$

ذلك لأنه لو طبقنا معيار نهاية النسبة كما يلي :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5^n}{n(5^n + 1)}}{\frac{1}{n}} = 1$$

فهي متباعدة

➢وعندما $y = -5$ يتم الحصول من المتسلسلة $(*)$ على المتسلسلة المتقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 5^n}{n(5^n + 1)}$$ حسب لايبنتز

إذاً فمنطقة تقارب المتسلسلة $(*)$ هي $[-5,5[$ وهذا يعني أن المتسلسلة$(*)$ لا تتقارب إلا من أجل جميع قيم y التي تحقق الشرط:

$-5 \le y < 5$ ومنه فالمتسلسلة الأصلية لا تتقارب إلا من اجل قيم x التي تحقق الشرط:

$$-5 < x + 2 < 5$$

أي

$$-5-2 \leq x < 5-2$$

$$-7 \leq x < 3$$

ومنه فمنطقة تقارب المتسلسلة الأصلية هي $[-7,3[$

أو لإيجاد منطقة التقارب:

بعد إيجاد نصف قطر التقارب ρ نقول:

مجال التقارب هو:

$$-5 < y < 5$$

$$-5 < x+2 < 5$$

$$-7 < x < 3$$

ومنه مجال التقارب هو $]-7,3[$

من أجل $x = 3$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(5^n+1)}$

متباعدة حسب نهاية النسبة

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5^n}{n(5^n+1)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{5^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{5^n\left(1+\frac{1}{5^n}\right)} = 1$$

المتسلسلتين من نوع واحد

$\sum \frac{1}{n}$ متباعدة$\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(5^n+1)}$ متباعدة.

من أجل $x = -7$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 5^n}{n(5^n+1)}$

متقاربة حسب لايبتنز ومتسلسلة القيم المطلقة متباعدة وبالتالي هي متقاربة شرطياً ومنه فمجال التقارب هو $[-7,3[$

((بمعنى أنه يمكن دراسة حالات الشكل على المتسلسلة الأصلية أو المتسلسلة الناتجة عن تغيير المتحول))

$$3)\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = 1$$

فمجال التقارب هو $]-1,1[$ و لندرس المتسلسلة عند طرفي المجال :

- عندما $x = 1$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ و هي متقاربة شرطياً حسب لايبنتز
- عندما $x = -1$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n} = -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ و هي متباعدة

فمجال التقارب هو : $]-1,1]$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(n!)\,x^n$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = 0$$

فهي متقاربة فقط عند المركز x=0

" انتهت المحاضرة "

لنبدأ بالمحاضرة 12 و 13 :

خواص متسلسلات القوى :

1- متسلسلة القوى تكون متقاربة باطلاق على أي مجال مغلق محتوى تماماً في مجال تقاربها $]-\rho,+\rho[$

2- متسلسلة القوى $\sum c_n x^n$ تتقارب بانتظام على أي مجال مغلق محتوى تماماً في مجال تقاربها $]-\rho,+\rho[$

3- مجموع متسلسلة القوى $\sum c_n x^n$ هو تابع مستمر على $]-\rho,+\rho[$ (مر معنا مثال على ذلك و هو $e^x = \sum\frac{x^n}{n!}$ و هو مستمر على مجال التقارب R)

4- إذا كان $\sum c_n x^n = \sum b_n x^n$ أياً كانت $x \in I$ فإن $c_n = b_n$ أياً كانت n

5- يمكن مكاملة متسلسلة القوى حداً حداً على أي مجال مغلق محتوى تماماً في مجال تقاربها $]-\rho,+\rho[$

فإذا كان :

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \Longrightarrow$$

$$F(x)=\int S(x)dx=\int\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int c_n x^n\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}+c\ldots(1)$$

و لحساب الثابت c لنضع $x=0$ ((مركز المتسلسلة))

$$F(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(0)^{n+1}+c\Longrightarrow \mathrm{F}(0)=\mathrm{c}\ldots.(2)$$

و حتى لا نجد صعوبة في حساب الثابت لنلاحظ ما يلي :

بطرح(2) من (1) :

$$F(x)-F(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$$

$$[F(t)]_{t=0}^{t=x}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x c_n t^n dt$$

أي أننا لنتخلص من حساب الثابت نقوم بإجراء المكاملة من 0 إلى x.

1- يمكننا اشتقاق حدود المتسلسلة حداً حداً على أي مجال مغلق محتوى تماماً في مجال تقاربها $]-\rho,+\rho[$

-2

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n=c_1x^1+c_2x^2+c_3x^3+\cdots$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right)'=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right)''=2c_2+3.2c_3x+\cdots.=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2}$$

... ...

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)c_n x^{n-k}$$

و هي صيغة المشتق من المرتبة k لأي متسلسلة قوى .

تمارين :

أوجد كل من المجاميع التالية :

-1

$$S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots . (n+1)x^n + \cdots$$

الحل : نعلم أن :

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots x^n + x^{n+1} + \cdots = \frac{1}{1-x} \forall |x| < 1$$

باشتقاق الطرفين :

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots . (n+1)x^n + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

-2

$$x + \frac{x^2}{2.2} + \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^4}{4.8} + \cdots = S(x)$$

لننطلق من هذا المجموع للوصول إلى الناتج :

$$S'(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2}{2-x}$$

نكامل الطرفين :

$$S(x) = \int_0^x \frac{2}{2-t} dt = -2[\ln|2-t|]_0^x = -2\ln|2-x| + 2ln2$$

التكاملات المعتلة

التكاملات المعتلة من النوع الأول :

تعريف : لتكن الدالة $f(x)$ دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a,\infty[$ و لنفرض أنّ $f(x)$ قابلاً للمكاملة على أي مجال محدود من الشكل $[a,A]$ أي بمعنى أن التكامل $\int_a^A f(x)dx$ موجود من أجل أي قيمة لـ A $a \le A$، يقال عن التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ إنه تكامل معتل من النوع الأول

-ويقال عن التكامل السابق إنه **متقارب** إذا و فقط إذا كانت النهاية :

$$\lim_{A\to+\infty} I(A) = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

موجودة و محدودة (أي نهاية وحيدة لا تساوي لانهاية)

و يقال عن قيمة هذه النهاية الموجودة و المحدودة بأنها قيمة التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ و نقول أن التابع $f(x)$ قابل للمكاملة على المجال $[a,\infty[$

- أما إذا كانت النهاية المذكورة آنفاً غير موجودة أو إنها تساوي اللانهاية (غير محدودة) فيقال أن التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **متباعد** .

ملاحظة : التكاملات المعتلة من النوع الأول هي التكاملات التي تأخذ أحد الأشكال التالية:

1- التكاملات من الشكل $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx$

2- التكاملات من الشكل $\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^a f(x)dx$ حيث $a \ge A$

3- التكاملات من الشكل $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)dx$

ملاحظة : أياً كانت a,b أعداد حقيقية فإن :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx$$

ملاحظة : يمكن رد الشكل (2) إلى الشكل (1) بإجراء التحويل $x = -t$

$$dx = -dt \implies \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = -\int_{+\infty}^{-a} f(-t)\, dt = \int_{-a}^{+\infty} f(-t)\, dt$$

مثال (1) : احسب قيمة التكامل :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

يمكن تقسيم هذا التكامل إلى تكاملين كما يلي :

$$I = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = I_1 + I_2$$

و لنحسب كل تكامل منهما على حدى:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= \lim_{A\to-\infty} [arctg(x)]_A^0 = \lim_{A\to-\infty} [arctg(0) - arctg(A)] = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

بنفس الأسلوب :

$$I_2 = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \int_{0}^{A} \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= \lim_{A\to+\infty} [arctg(x)]_0^A = \lim_{A\to+\infty} [arctg(A) - arctg(0)] = \frac{\pi}{2}$$

و عليه يكون :

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

ملاحظة :

$$arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$
$$arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

فالتكامل المعطى متقارب و قيمته π.

ملاحظة : كان بالإمكان حل التكامل السابق دون تقسيمه إلى تكاملين ((حاول ذلك☺))

مثال (2) : ادرس تبعاً لقيم λ تقارب و تباعد التكامل المعتل الآتي :

$$I=\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}\quad : \quad a>0 \quad , \quad \lambda \epsilon R$$

الحل : لنميز الحالتين الآتيتين :

1- من أجل $\lambda \neq 1$ عندئذٍ :

$$I=\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}=\lim_{A\to+\infty}\int_{a}^{A}x^{-\lambda}dx=\lim_{A\to+\infty}\left[\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right]_{a}^{A}=\frac{1}{1-\lambda}\lim_{A\to+\infty}\left(A^{1-\lambda}-a^{1-\lambda}\right)$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda} & :\lambda>1\\ \infty & :\lambda<1\end{cases}$$

2- من أجل $\lambda = 1$ يكون :

$$I=\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{A\to+\infty}\int_{a}^{A}\frac{dx}{x}=\lim_{A\to+\infty}(\ln A-\ln a)=+\infty$$

مما سبق نجد أن التكامل $\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}$ يتقارب من أجل $\lambda>1$. و يتباعد فيما عدا ذلك.

مثال (3) :وظيفة: ادرس تقارب التكامل :

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|x|}dx \quad : a>0$$

في الحقيقة إن وجود القيمة المطلقة في التابع المكامل و كون مجال المكاملة هو $]-\infty,+\infty[$ فلا بد أن نتخلص من القيمة المطلقة و ذلك كما يلي :

لما كان :

$$|x|=\begin{cases}x & :x\geq 0\\ -x & :x<0\end{cases}$$

يمكن تقسيم مجال المكاملة كما يلي :

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|x|}dx=\int_{-\infty}^{0}e^{ax}dx+\int_{0}^{+\infty}e^{-ax}dx=I_1+I_2$$

و لنحسب كل منهما على حدى أيضاً :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} e^{ax}dx = \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{0} e^{ax}dx = \frac{1}{a}\lim_{A\to-\infty}[e^{ax}]_A^0 = \frac{1}{a}[1-e^{aA}] = \frac{1}{a}$$

$$I_2 = \int_{0}^{+\infty} e^{-ax}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_{0}^{A} e^{-ax}dx = -\frac{1}{a}\lim_{A\to+\infty}[e^{-ax}]_0^A == -\frac{1}{a}\lim_{A\to+\infty}[e^{-aA}-1]_0^A = \frac{1}{a}$$

وبالتالي :

$$I = I_1 + I_2 = \frac{2}{a}$$

فالتكامل المعطى متقارب و قيمته $\frac{2}{a}$.

مثال(4): وظيفة

$$I = \int_0^{+\infty} sin\, x\, dx$$

الحل:

$$= \lim_{A\to+\infty}\int_0^A sinx\, dx = \lim_{A\to+\infty}[-\cos x]_0^A$$

$$= \lim_{A\to+\infty}[-\cos A + \cos 0] = \text{غير موجود}$$

فالتكامل متباعد.

ملاحظة : $\int_a^{An} f(x)\,dx = \int_a^{A_1} f(x)\,dx + \int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)\,dx$

معايير تقارب التكاملات المعتلة من النوع الأول في حالة التوابع غير سالبة:

1) ليكن $f(x)$ تابع معرف على $[a,+\infty[$ حيث $a>0$ يكون التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

متقارباً إذا وفقط إذا كان التكامل $\int_a^A f(x)\,dx$ محدوداً على $[a,A]$ أي عندما وفقط عندما يوجد عدد ثابت موجب مثل L بحيث يكون:

$$\left|\int_a^A f(x)dx\right| < L \qquad : A > a$$

2) معيار المقارنة:

لتكن التكاملات $\int_a^A f(x)\,dx$ $\int_a^A g(x)dx$ موجودة مهما كانت $A>a$ ويحققان $a<A$ و $a<x$

$0 \leq f(x) < c.g(x)$ حيث c عدد موجب عندئذٍ:

1) إذا كان التكامل $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ متقارباً فإن التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ متقارب.

2) إذا كان التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ متباعد فإن التكامل $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ متباعد.

مثال(5): أدرس التقارب

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{2+\sin x}{x^2} dx$$

الحل:

أياً كان A من $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$ فإن التكاملين $\int_{\frac{\pi}{2}}^{A} \frac{dx}{x^2}$ و $\int_{\frac{\pi}{2}}^{A} \frac{2+\sin x}{x^2} dx$ موجودان ومتسمران على $\left[\frac{\pi}{2}, A\right]$ عندما $x \geq \frac{\pi}{2}$ وكذلك فإن

$\frac{2+\sin x}{x^2} \leq \frac{3}{x^2}$

لأن أكبر قيمة لـ $\sin x$ هي (1) وبالتالي $\frac{2+\sin x}{x^2} \leq \frac{2+1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$

$$3\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 3\left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} = \frac{6}{\pi} \quad \text{متقارب}$$

إذاً حسب معيار المقارنة التكامل متقارب

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{2+\sin x}{x^2} dx \leq \frac{6}{\pi}$$

مثال : ادرس تقارب التكامل :

$$I = \int_1^{\infty} e^{-x} x^t \, dx \quad : t \in R$$

نأخذ $b \in [1, \infty[$ نجد أن التكاملين :

$$\int_1^b e^{-x} x^t dx \quad \& \quad \int_1^b \frac{dx}{x^2}$$

فحسب معيار نهاية النسبة :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x} x^t}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{t+2}}{e^x} = 0$$

و بما أن $\int_1^b \frac{dx}{x^2}$ متقارب ، فإن التكامل المطلوب متقارب حسب معيار نهاية النسبة

مبرهنة 4 : معيار كوشي : الشرط اللازم و الكافي لكي يكون التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ متقارباً هو أن يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد موجب A_0 $(A_0 \geq a)$ بحيث أياً كانت A, A' يحققان $A' \geq A \geq A_0$ فإن :

$$|\Phi(A') - \Phi(A)| = \left|\int_a^{A'} f(x)dx - \int_a^{A} f(x)dx\right| = \left|\int_A^{A'} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

حيث $\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx$

الإثبات : بفرض $\int_a^{\infty} f(x)dx$ متقارب، أي أن $\lim_{A\to\infty} \Phi(A) = \Phi(\infty)$ موجودة و محدودة

و بالتالي يكون لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي A_0 ($A_0 \geq a$) بحيث يكون $|\Phi(A') - \Phi(A)| < \varepsilon$ لأجل كل $A' \geq A \geq A_0$

و بالعكس لأجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $A_0 \geq \max(a, 0)$ بحيث يكون $|\Phi(A') - \Phi(A)| < \frac{\varepsilon}{2}$ عندما $A' \geq A \geq A_0$

نثبت A و نجعل A تسعى إلى اللانهاية :

$$|\Phi(\infty) - \Phi(A) = \left|\int_a^{\infty} f(x)dx - \int_a^{A} f(x)dx\right| = \left|\int_A^{\infty} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

معيار آبل لدراسة تقارب تكامل معتل :

لتكن $f(x), g(x)$ تابعان معرفان على المجال $[a, +\infty[$ ، يكون التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ متقارباً إذا تحقق ما يلي :

1- التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ متقارباً
2- التابع g(x) مطرد و محدود أي : $L > 0$: $|g(x)| < L$ حيث $a \leq x$

معيار ديركليه لدراسة تقارب تكامل معتل :

لتكن $f(x), g(x)$ تابعان معرفان على المجال $[a, +\infty[$ ، يكون التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ متقارباً إذا تحقق ما يلي :

1- التابع $f(x)$ قابل للمكاملة على كل مجال من الشكل $[a, A]$ حيث A>a
2- التابع g(x) مطرد و يحقق أن : $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$

مثال : ادرس التكامل :

$$I = \int_{1}^{\infty} \frac{sinx}{x^{\lambda}} dx \quad : \lambda > 0$$

نستخدم معيار ديركليه حيث يكتب التكامل المعطى بالشكل :

$$I = \int_{1}^{\infty} \underbrace{Sinx}_{f(x)} \underbrace{\frac{1}{x^{\lambda}}}_{g(x)} dx$$

نلاحظ أن :

$$\left|\int_{a}^{A} f(x)dx\right| = \left|\int_{a}^{A} sinx\, dx\right| = |[-cosx]_{a}^{A}|$$
$$= |cosa - cosA| \underbrace{\leq}_{|x-y|\leq|x|+|y|} |cosa| + |cosA| \underbrace{\leq}_{|cos\theta|\leq 1} 1 + 1 = 2$$

و بالتالي فإن التابع $f(x) = sinx$ قابل للمكاملة على هذا المجال ، من جهة أخرى فإن التابع $g(x) = \frac{1}{x^{\lambda}}$ متناقص و يحقق أن $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ بالتالي و حسب معيار ديركليه يكون التكامل

$$I = \int_{1}^{\infty} \frac{sinx}{x^{\lambda}} dx \quad : \lambda > 0$$

متقارباً .

((بنفس الأسلوب تتم دراسة التكامل
$((I = \int_{1}^{\infty} \frac{cosx}{x^{\lambda}} dx \quad : \lambda > 0$

أمثلة إضافية

التمرين الأول :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{-1} x.e^{-x^2}.dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{-1} x.e^{-x^2}.dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}\int_{a}^{-1} -2x.e^{-x^2}.dx$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left[e^{-x^2}\right]_a^{-1}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left[e^{-1} - e^{-a^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-1}\right] = -\frac{1}{2e}$$

هذا يعطي أنّ التكامل متقارب .

التمرين الثاني :

$$I_2 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\ln|x|\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\ln b - \ln 1\right]$$

$$= +\infty$$

فالتكامل متباعد.

التمرين الثالث :

$$I_3 = \int_0^{\infty} cosx\, dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} cosx\, dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[sinx\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[sinb - sin0\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}(\sin b) = \text{غير معيّن}$$

وبالتالي فالتكامل متباعد

$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{2x}{1+x^2} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx$$

نأخذ التكامل $\int_0^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx$ من الطرف الأيمن:

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} \frac{2x}{1+x^2} dx = \lim_{A\to+\infty} [\ln|1+x^2|]_0^A$$

$$= \lim_{A\to\infty} [\ln(1+A^2) - \ln 1]$$

$$= \lim_{A\to+\infty} [\ln(1+A^2)] = +\infty$$

إذاً التكامل $\int_0^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx$ متباعد وبالتالي التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx$ متباعد.

3)معيار نهاية النسبة:

ليكن لدينا التكاملين $\int_a^A f(x)\, dx$ و $\int_a^A g(x)\, dx$ موجودين من أجل جميع قيم A

حيث $A > a$ ولدينا شرط:

$f(x) \geq 0$ و $g(x) \geq 0$ عندما $x \geq a$ وبفرض أن:

عندئذٍ:

1) إذا كان $c > 0$ فإن التكاملين من نوع واحد أي متقاربين معاً أو متباعدين معاً

2) إذا كان $c = 0$ فإن تقارب $\int_a^{\infty} g(x)\, dx$ يقتضي تقارب $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$

مثال إضافي :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

نطبق معيار نهاية النسبة حيث نختار التكامل : $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ فنجد أن :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}}{1/x^2} = 1 > 0$$

فالتكاملان

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} \;\&\; \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$$

من نفس النوع ولما كان $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ متقارباً فإن التكامل المعطى سيكون متقارب.

تمرين:

$$I = \int_1^{+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{1+x^2}$$

أيضاً يمكن تطبيق معيار نهاية النسبة حيث نختار التكامل $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ و نحسب النهاية :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}}{\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = 1 > 0$$

و فالتكاملان $\int_1^{+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{1+x^2}$, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ من نفس النوع و لكون $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ متباعد فإن التكامل المعطى يكون متباعد.

انتهت المحاضرة

نذير تيناوي-رنا شوربة