معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثالثة

التابعي 1

المحاضرة 16

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 3rd year

◄ دكتور المادة: جمال مللي

◄ المحاضرة : السادسة عشر

قاعدة هامل :

لتكن الأسرة $X \supseteq (e_i)_{i\in I}$ نقول إنها قاعدة هامل إذا تحقق :

$\forall x \in X\ ;\ \exists$ مجموعة أدلة منتهية $J \subseteq I$:

يكتب على شكل تركيب خطي منتهي :

مجموع منتهي $x = \sum_{i\in J} \alpha_i\, e_i$

لا يتطلب أن يكون الفضاء فضاء منظم .

ليس بالضرورة أن تكون العدودة دائما موجودة

قاعدة شاودر :

ليكن الفضاء المنظم $(X, ||.||)$ و الأسرة $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ ، نسمي هذه الأسرة قاعدة شاودر إذا تحقق أنه من أجل أي $x \in X$ فإنه يوجد $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ بحيث :

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| \to 0$$

((كل قاعدة هامل هي قاعدة شاودر))

تمارين :

التمرين الأول : بين أن مجموعة كل الأعداد الحقيقية المزودة بالمترك d المحدد بالمساواة :

$$d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$$

تشكل فضاء متريا غير تام .

الحل :

$$X = R$$

$$d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$$

$$d(x,y) = |f(x) - f(y)|$$

هذا التابع $f(x) = arctanx$ مستمر على كل R

عندما $x \to -\infty$ فإن : $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

(يترك للطالب برهان أن d مسافة)

لنعرف المتتالية

$$x_n = \left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)\right)_{n\in N}$$

$$\forall\, n,m \in N\,; d(x_n,x_m) = \left|actan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{m}\right)\right)\right|\right.$$

$$= \left|\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{m}\right)\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \to 0$$

وبالتالي x_n كوشية :

$$\forall x \in R\,; -\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$$

نفرض مؤقتا وجود : $x \in R$ بحيث : $x_n \to x$

$$\xrightarrow{\text{هذا يكافئ}} d(x_n,x) \to 0$$

ومنه تعريفا $d(x_n,x) = |\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} - \arctan x|$

$$|\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} - \arctan x| \geq |\frac{\pi}{2} - \arctan x| - \frac{1}{n} > 0$$

وهذا الحد بقي أكبر من الصفر . وهذا يناقض الفرض المؤقت وبالتالي هذا يبين عدم تمام فضاء R المزود بهذا المترك

اثبت أن(R,d) فضاء متري غير تام .

$$T:(R,d)\to (\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\,,|.|)$$

$$x\to T_x:\arctan x$$

و من المعلوم أن هذا التابع متزايد فإنه متباين و هو غامر

ليكن: $x,y\in R\,;d(x,y)=|\arctan x-\arctan y\,|=|T_x-T_y|$

التمام محفوظ بالايزومتريات

((أي فضائين متريين وكان أحدهما ايزومترياً مع الآخر و تام فالاخر تام أيضا))

((التمام ليس له أي علاقة بالتبلوجيا المولدة))

مثال على ذلك :

$$\tau_{|.|}\quad (R\,,|.|)$$

$$\tau_d\quad (R\,,d)$$

الأول هو فضاء متري تام

الثاني فضاء متري غير تام

وبالتالي نجد أن $\tau_{|.|}=\tau_d$

التمرين الثاني : لتكن X مجموعة كل الأعداد الصحيحة الموجبة و $d(m,n)=|m^{-1}-n^{-1}|$

أثبت أن (X,d)فضاء غير تام ؟؟

من الواضح أن dمترك على X ، لنأخذ :

$$T:(X,d)\to(A,d_1)$$

$$x\to T_x=\frac{1}{x}$$

$$d_1(x,y)=|x-y|$$

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \ , A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots .\right\}$$

إن(A, d_1) و (X, d) ايزومتريان و (A, d_1) غير تام وبالتالي فإن (X, d)غير تام

التمرين الثالث : أثبت أن الفضاء الجزئي Yمن $c[a,b]$المؤلف من كل الدوال $x \in c[a,b]$المحققة للشرط $x(a) = x(b)$هو فضاء تام

حسب مبرهنة سابقة يكفي إثبات أن Yمغلقة

$$c[a,b] \supseteq \ Y \coloneqq \{x \in c[a,b]; x(a) = x(b)\}$$

و $(\, c[a,b] \, , d \,)$ فضاء متري تام

لنثبت أن $y = \bar{y}$ مغلقة :

$y \subseteq \bar{y}$هذا محقق

لتكن x_nمتتالية من عناصر Y متقاربة من x لنبرهن أن $x \in Y$ ليتم المطلوب :

$$(x_n)_{n \in N} \subseteq Y \, ; x_n \to x$$

x حتما هو دالة مستمرة والمترك هو مترك منظم

$$\forall \, n \in N \, ; x_n(a) = x_n(b) \, ; x_n \to x$$

نأخذ النهايات :

$$x(a) = \lim_{n\to\infty} x_n(a) = \lim_{n\to\infty} x_n(b) = x(b)$$

$$\underset{\text{ومنه}}{\Rightarrow} x \in Y \ \Rightarrow Y \text{مغلق}$$

هل كل ايزومتر ,I متباين وغامر ؟

نأخذ المثال : $T \ : (X, d_x) \to \left(Y \, , d_y\right)$

نفرض مؤقتا $\forall x, y \ \in X \, ; x \neq y$

$$T_x = T_y$$

$$\Rightarrow d_x(x,y) > 0$$

$$\Rightarrow d_y(T_x\,,T_y\,) = 0$$

وهذا مستحيل لأن الايزومتر يحافظ على المسافات ، إذن هو متباين

بالتالي كل تطبيق ايزومتري هو متباين ولكن ليس بالضرورة أن يكون غامر .

التمرين الرابع :

إذا كان X_1, X_2ايزومتريان وكان X_1 تام ، فإثبت أن X_2تام

الحل: سنأخذ بدل $X\,,Y \Longrightarrow X_1, X_2$

ليكن(X, d_x) و $(Y\,,d_y)$ فضائين ايزومتريان نفرض أن$(Y\,,d_y)$ تام

$$T\ :(x,d_x) \to (y\,,d_y)$$

$$x \longmapsto T_x$$

نأخذ متتالية x_nمن عناصر

$$(x_n) \subseteq X\,;\ \forall\varepsilon > 0\,;\exists\, N(\varepsilon) \in N;\ \forall\, n,m\ \geq N(\varepsilon)$$

$$d_y(T_{x_n}, T_{x_m}) = d_x(x_n, x_m) < \varepsilon$$

$$(T_{x_n}) \subseteq y \text{ متقاربة}$$

$$\exists\, y \in Y\,; T_{x_n} \to y$$

$$\exists!\, x \in X : T_x = y$$

$$\exists\, N_{2(\varepsilon)}\,;\ \varepsilon\ \in N\,;\ \forall n,m \geq N_{2(\varepsilon)}: d_y(T_{x_n}\,,T_x) < \varepsilon$$

ومنه $x_n \to x$

$$d_x(x_n, x) < \varepsilon$$

انتهت المحاضرة