معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثانية

البنى الجبرية1

المحاضرة 10

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل:

هاتف – واتساب: 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2nd year

◄ دكتور المادة: فادي أبو حرب

◄ المحاضرة : العاشرة ◄ عنوان المحاضرة: نظرية الزمر

تمهيدية اقليدس:

ليكن P عدداً أولياً و $a,b\in Z$ اذا كان P يقسم الجداء $a.b$ عندئذٍ إما P يقسم a أو P يقسم b

البرهان:

لنفرض ان P يقسم الجداء $a.b$ أي يوجد $m\in Z$ بحيث $Pm=a.b$

ولنفرض ان P لا يقسم a ومنه $gcd(a,P)=1$ وحسب تعريف ال gcd يوجد $s,t\in Z$ بحيث

$$as+pt=1$$

$$abs+pbt=b$$

$$pms+pbt=b$$

$$p\underbrace{(ms+bt)}_{r}=b$$

$$pr=b$$

أي يوجد $r\in Z$ بحيث $pr=b$ ومنه فإن P قاسم ل b.

مبرهنة (بدون برهان):

ليكن P عدداً اولياً و $a_1,a_2,\dots\dots.a_n\in Z$ اذا كان P يقسم الجداء $a_1,a_2,\dots\dots.a_n$ فإن P يقسم احد المضاريب a_i حيث $1\le i\le n$ على الأقل .

المبرهنة الأساسية في الحساب:

كل عدد صحيح اكبر من الواحد هو اما عدد اولي او جداء منته لاعداد أولية وهذا الجداء وحيد.

ملاحظة على الهامش : اكبر عدد اولي اكتشف في عام 2009 وكان مؤلف من 11 مليون منزلة

نظرية الزمر group the ory

تعريف: قانون التشكيل الداخلي:

لتكن G مجموعة غير خالية نسمي كل تطبيق $.: G \times G \longrightarrow G$

$$(a, b) \longrightarrow a.b$$

قانون تشكيل داخلي على المجموعة G

تعريف الزمرة:

نقول عن المجموعة غير الخالية المزودة بقانون تشكيل داخلي $(.)$ انها زمرة اذا حققت الشروط التالية:

1- التجميعي: القانون $(.)$ تجميعي أي $\forall a, b, c \in G\, ; (a.b).c = a.(b.c)$

2- الحيادي: يوجد في G عنصر e يحقق:

$$\forall a \in G\, ; a.e = e.a = a$$

3- المقلوب: يوجد لكل عنصر $a \in G$ عنصر $b \in G$ يحقق $a.b = b.a = e$

نسمي b مقلوب العنصر a ونرمز له بالرمز a^{-1}

تعريف الزمرة التبديلية: نقول عن الزمرة $(G, .)$ انها تبديلية اذا حققت الشرط $\forall a.b \in G\, ; a.b = b.a$

جدول لتمييز الزمرة الجمعية والضربية:

الزمرة	الجمعية	الضربية
قانون التشكيل	$+$	$.$
المحايد	0	$1 \quad or \ e$
النظير \ المقلوب	نظير a هو $-a$	مقلوب a هو a^{-1}
شكل العناصر	$a + b$	$a.b$

Syria Math Team

المضاعف/ القوة	$n.a$	a^n

ملاحظة: لتكن $(G,.)$ زمرة و $a \in G$, $n \in Z$ عندئذٍ:

$n < 0$ $\underbrace{a^{-1}.a^{-1}\dots.a^{-1}}_{n \text{ مرة}}$ $n = 0$ 1 $n > 0$ $a^n = \{\underbrace{a.a\dots.a}_{n \text{ مرة}}$

أمثلة:

- $(Z,+)$ تشكل زمرة تبديلية.
- $(N,+)$ لاتشكل زمرة.
- $(Z,-)$
- $(M_z(z),+)$ تشكل زمرة تبديلية.

$$M_z(z) = \{(a\ b\ c\ d\ ); a, b, c, d\ \in Z\}$$

- $(M_z(z),.)$ وظيفة.

تمهيدية:

لتكن $(G,.)$ زمرة عندئذٍ:

1) المحايد وحيد.
2) مقلوب أي عنصر وحيد.
3) قانون الاختصار محقق: $\forall a, b, c \in G\ ; a.b = a.c \Rightarrow b = c$
4) أياً كان $a \in G$ فإن $(a^{-1})^{-1} = a$ برهن.
5) أياً كان $a_1.a_2\dots.a_n \in G$ فإن (برهن لاجل $n = 2$)

$$(a_1.a_2\dots.a_n)^{-1} = a_n^{-1}.a_{n-1}^{-1}\dots.a_1^{-1}$$

البرهان:

1) لنفرض وجود محايدين e_1, e_2 عندئذٍ:

$e_1.e_2 = e_2$ محايد e_1

$e_1.e_2 = e_1$ محايد e_2

$$\Leftarrow e_1 = e_2$$

2) لنفرض وجود مقلوبين b_1, b_2 للعنصر a عندئذٍ :

$$b_1.a = a.b_1 = e \qquad , \qquad b_2.a = a.b_2 = e$$

ومنه

$$b_1 = b_1.e. = b_1(a.b_2) = \underbrace{(b_1.a).b_2}_{\text{الخاصة التجميعية محققة}} = e.b_2 = b_2$$

ومنه لمقلوب يكون وحيد

3) قانون الاختصار

$$\forall a,b,c \in G; a.b = a.c$$

$$a^{-1}.a.b = a^{-1}.a.c$$

$$e.b = e.c$$

$$b = c$$

$$e.b = e.c$$

4) ليكن $a \epsilon G$ عندئذ :

$$\underbrace{a^{-1}}_{\text{عنصر}}.\underbrace{(a^{-1})^{-1}}_{\text{مقلوبه}} = e$$

نضرب الطرفين ب a

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

5) يتم اثباته من خلال الاستقراء :

نثبته من أجل $n = 2$

ولنبرهن أن $a, b \epsilon G$ $\quad (a.b)^{-1} = b^{-1}.a^{-1}$

وبما أن $a, b \epsilon G$ فإن $a.b \epsilon G$ ومنه لكل عنصر مقلوب أي : $(a.b)^{-1} \epsilon G$ ويحقق أي عنصر .

مع المقلوب له يعطي المحايد أي أن : $(a.b).(a.b)^{-1} = e$.

$$. a(b.(a.b)^{-1}) = e$$

نضرب بـ a^{-1} من اليسار

$$. b.(a.b)^{-1} = a^{-1}$$

نضرب بـ b^{-1} من اليسار

$$(a.b)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

Syria Math Team

لنفرض أن $n = k$ محققة : $\forall\, k \in N^*$

$$(a_1.a_2.a_3 \dots \dots .. a_k)^{-1} = {a_k}^{-1}.{a_{k-1}}^{-1} \dots .. {a_2}^{-1}.{a_1}^{-1}\ (*)$$

لنثبت صحة العلاقة من أجل $k + 1 \in N^*$

$$(a_1.a_2.a_3 \dots \dots .. a_{k+1})^{-1} = {a_{k+1}}^{-1}.{a_k}^{-1} \dots .. {a_2}^{-1}.{a_1}^{-1}\ (**)$$

بفرض أن $(a_1.a_2.a_3 \dots \dots .. a_k) = b$

بالتعويض في $(**)$ نجد :

$$(b.a_{k+1})^{-1} = {a_{k+1}}^{-1}.b^{-1} = {a_{k+1}}^{-1}.(a_1.a_2.a_3 \dots \dots .. a_k)^{-1}$$

نلاحظ أن العلاقة $(*)$ محققة ومنه يكون :

$$= {a_{k+1}}^{-1}.{a_k}^{-1} \dots .. {a_2}^{-1}.{a_1}^{-1}$$

وبالتالي : $(a_1.a_2.a_3 \dots \dots .. a_{k+1})^{-1} = {a_{k+1}}^{-1}.{a_k}^{-1} \dots .. {a_2}^{-1}.{a_1}^{-1}$ محققة .

Syria Math Team

انتهت المحاضرة