معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثالثة

التحليل التابعي 1

المحاضرة 19

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل:

هاتف – واتساب: 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 3rd year

2019/12/9

نظري

◄ دكتور المادة: جمال مللي

◄ المحاضرة : التاسعة عشر

-مبرهنة التمام :

كل فضاء جزئي منتهي البعد Y من فضاء منظم X لابد أن يكون تاماً وبوجه خاص فإن كل فضاء منظم منتهي البعد تام .

البرهان :

حتى يكون الفضاء Y تاماً يجب أن يكون كل متتالية كوشي فيه متقاربة
لتكن لدينا (y_m)متتالية ما لكوشي في Y ولنثبت تقاربها في Y ولنرمز لنهايتها ب(y)
ولنفرض أن dim y = n أي أن الفضاء Y مولّد بالقاعدة $\{e_1, \dots, e_n\}$ وبالتالي كل عنصر من (y_m) من الفضاء الجزئي Y سيكتب على شكل تركيب خطي وبشكل وحيد كالتالي :

$$y_m = \propto_1^{(m)} e_1 + \cdots . + \propto_n^{(m)} e_n$$

$$y_m = \sum_{i=1}^{n} \propto_i^{(m)} e_i$$

ولما كانت (y_m) متتالية كوشي فإنها تحقق ما يلي :

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists N \in \mathbb{N}^*; m, r \geq N; \|y_m - y_r\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^{n} (\propto_i^m - \propto_i^r) e_i \right\| < \varepsilon$$

وحسب تمهيدية التراكيب الخطية يكون لدينا :

$$\varepsilon > \|y_m - y_r\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} (\propto_i^m - \propto_i^r) e_i \right\| \geq c \sum_{i=1}^{n} |\propto_i^m - \propto_i^r|$$

وبالقسمة على c (ثابت موجب) فإننا نجد من أجل كل i وعندما $m, n > N$:

$$|\propto_i^m - \propto_i^r| \leq \sum_{i=1}^{n} |\propto_i^m - \propto_i^r| < \frac{\varepsilon}{c}$$

(حيث إن مجموع مقادير موجبة أصغر من $\frac{\varepsilon}{c}$ فإن كل من هذه المقادير سيكون حتماً أصغر أو يساوي $\frac{\varepsilon}{c}$

أي أنه تحقق لدينا :

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists N \in \mathbb{N}^* ; m, r \geq N ; \left|\propto_i^{(m)} - \propto_i^{(r)}\right| < \frac{\varepsilon}{c}$$

أي أن $\propto_i^m$ متتاليات كوشية في فضاءات تامة $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ متقاربة من $\propto_i$:

$$\propto_i^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} \propto_i$$

كما هو موضح كالتالي ، بأخذ عنصر من Y

$$y_1 = \propto_1^{(1)} e_1 + \propto_2^{(1)} e_2 + \cdots .. + \propto_n^{(1)} e_n$$

$$y_2 = \propto_1^{(2)} e_1 + \propto_2^{(2)} e_2 + \cdots .. + \propto_n^{(2)} e_n$$

.

.

.

$$y_r = \propto_1^{(r)} e_1 + \propto_2^{(r)} e_2 + \cdots .. + \propto_n^{(r)} e_n$$

.

.

$$y_m = \propto_1^{(m)} e_1 + \propto_2^{(m)} e_2 + \cdots .. + \propto_n^{(m)} e_n$$

نلاحظ أن كل عمود هو عبارة عن متتالية كوشية متقاربة ومنه نستطيع أن نكتب عنصر يمثل هذه النهايات (نهايات المتتاليات الكوشيات)

$$y = \propto_1 e_1 + \cdots . + \propto_n e_n$$

نلاحظ أن $y \in Y$ لأنه مولّد بالجملة $\{e_1, \dots, e_n\}$

وإن y يلعب دور نهاية للمتتالية y_m أي

$$\|y_m - y\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} (\propto_i^m - \propto_i^r) e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\propto_i^m - \propto_i^r| \, \|e_i\|$$

ولما كان $\propto_i^m \to \propto_i$ (كوشيات متقاربة) فإن الطرف الأيمن من المساوة يسعى إلى الصفر وبالتالي فإن $\|y_m - y\| \to 0$

أي بالاعتماد على التعريف نجد أن $y_m \to y$
وهذا يبين أن (y_m) متقاربة في y ونهايتها (y) ومنه Y تام
ولنثبت الطرف الثاني من المبرهنة أنه بوجه خاص
كل فضاء جزء من نفسه أي $(X \subseteq X)$ وبالاعتماد على الشطر الأول من المبرهنة فإنX جزئي منتهي البعد أي أن X تاماً
تم المطلوب .

مبرهنة الانغلاق :

كل فضاء جزئي منتهي البعد Y من فضاء منظّم X لابّد أن يكون مغلقاً

البرهان :

ليكن لدينا $(X, \|.\|)$ فضاء منظم وليكن لدينا Y فضاء جزئي منتهي البعد من X يجب علينا إثبات أن Y لابّد أن يكون مغلقاً في X ولإثبات ذلك يكفي أن نثبت أن $Y = \bar{Y}$, انطلاقاً من تعريف اللصاقة كونها أصغر مجموعة مغلقة تحوي Y فإن $Y \subseteq \bar{Y}$
والآن لنثبت الاحتواء الثاني ، لنأخذ عنصر اختياري من اللصاقة $y \in \bar{Y}$ عندئذٍ حسب مبرهنة اللصاقة يكون لدينا متتالية من عناصر Y $(y_n \in Y)$
تتقارب من y ، وكون X هو الفضاء الكلي فإن أي متتالية متقاربة فيه ستكون النهاية تنتمي إلى هذا الفضاء أي $y \in X$ وكون Y فضاء جزئي منتهي البعد في X فهو تام بخصوص الطبولوجيا المعرفة على X أي أن المتتالية y_n فيه ستكون متقاربة من y وحسب تعريف التقارب وكون النهاية وحيدة وإن التقارب يتم في Y أي $y \in Y$ ومنه $\bar{Y} \subseteq Y$ من الاحتوائين السابقين نجد أن $Y = \bar{Y}$ ومنه Y فضاء جزئي مغلق .

طريقة ثانية للإثبات :
يتم البرهان على حسب مبرهنة بالاستفادة من أحد الاتجاهين للمبرهنة والتي تنص على ((الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء الجزئي Mمن فضاء متري تام Xفضاء تام هو أن يكون المجموعة Mمغلقة في Xكان في أحد الاتجاهان
(I) Mتام $\Longleftarrow$ Mمغلق
Mمغلق $\Longleftarrow$ Mتام
$\forall M \subseteq (X, d)$ و X تام و $M \in X$
نستفيد من الاتجاه Iفهو سيخدم مبرهنتنا كونه منتهي البعد فإنه تام وكونه تام فإنه مغلق وبذلك يتم المطلوب
يجدر التوجيه النظر إلى أنه ليس لزاما على الفضاءات الجزئية غير منتهية البعد أن تكون مغلقة

مثال :

ليكن $X = c[0,1]$ و $Y = span\ (x_0\ , x\ , \dots .)$ بحيث كل
$y = p(x) \in Y$ هو كثير حدود و ينتمي لـ $X = c[0,1]$

كل شيء يصح بالفضاءات المترية يصح بالفضاءات المنظمة

عندما لا نذكر نوع المترك فإننا نقصد المترك المألوف دوما .

في مثالنا المترك المألوف على $c[0,1]$ هو $\max|x(t) - y(t)|$ وبخصوص المترك المألوف فإنه تام وبذلك نعمم أنه ينطبق على الفضاء المنظم فإن تام

ولو نظرنا (مثال معاك):

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1 + \frac{t}{1!}$$

$$x_3 = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!}$$

$$x_n = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots . + \frac{t^n}{n!}$$

هذه المتتالية موجودة في Y الجزئي من $c[0,1]$ ذلك لأنها كثيرات حدود

و بملاحظة أن :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t \notin Y$$

و بالتالي وجدنا متتالية من عناصر Y متقاربة من عنصر $x = e^t$ و هذا العنصر لا ينتمي لـ Y

و بالتالي هو ليس مغلقاً .

انتهت المحاضرة

إعداد: رولا الشيخ و تقى إسماعيل و بسمة نصر الله