معك نحو

التخرج

Syria Math Team

التحليل العقدي 1

المحاضرة 17

السنة الثالثة

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 3rd year

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

نظري

◄المحاضرة: السابعة عشر   عنوان المحاضرة: التقارب بالإطلاق

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-التقارب بإطلاق

2- اختبارات التقارب بإطلاق

المتسلسلة المتقارب بالإطلاق

نقول عن $\sum z_n$ أنها متقاربة بإطلاق إذا كانت متسلسلة الطويلات لها متقاربة ($\sum |z_n|$ متقاربة)

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$ متقاربة بالإطلاق لأن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{i^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ متقاربة}$$

مثال $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ ليست متقاربة بالإطلاق لأن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{i^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ متباعدة}$$

مبرهنة : كل متقاربة بالإطلاق تكون متقاربة أي :

$$\sum z_n \text{ متقاربة بإطلاق } \overset{\text{تعريفاً}}{\Leftrightarrow} \sum |z_n| \text{ متقاربة}$$

الإثبات : لنفرض أن $\sum z_n$ متقاربة بالاطلاق ونريد اثبات أنها متقاربة

$$\forall\, \varepsilon > 0\,;\ \exists\, N > 0\,; \forall\, m > n \geq N:\ |z_{n+1}| + \cdots + |z_m| < \varepsilon$$

بالتالي :

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_m| \leq |z_{n+1}| + \cdots + |z_m| < \varepsilon$$

$\Leftarrow \sum z_n$ متقاربة

◄ملاحظة

العكس للمبرهنة السابقة غير صحيح في الحالة العامة أي قد توجد متسلسلة متقاربة وليست متقاربة بإطلاق نسمي مثل هذه المتسلسلة متسلسلة متقاربة شرطياً

مثال أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ متقاربة شرطا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{i^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \text{متباعدة}$$

لأنها ريمانية $(p = 1 \leq 1)$ هذا يعني أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ ليست متقاربة بالاطلاق

واذا أردنا كتابة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ بالشكل المثلثي :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(cis\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^n}{n} = \frac{\left(cis\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(\frac{n\pi}{2}))}{n} + i\,\frac{\sin(\frac{n\pi}{2}))}{n}\right)$$

الأن سوف نجزأها إلى متسلسلتين حقيقية و تخيلية لأثبات إنها متقاربة

بالتالي تصبح متسلسلة الأجزاء الحقيقية للمتسلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\frac{n\pi}{2}))}{n} = 0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$$

وهي متقاربة (وذلك حسب ليبنز متناوبة وحدها العام بالقيمة المطلقة متتالية متناقصة وتسعى إلى الصفر)

وكذلك فإن متسلسلة الأجزاء التخيلية لـ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ هي :

$$\frac{\sin(\frac{n\pi}{2}))}{n}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$

وهي متقاربة أيضاً حسب ليبنز

$$\Leftarrow \sum\frac{i^n}{n} \text{ متقاربة } \Leftarrow \sum\frac{i^n}{n} \text{ متقاربة شرطيا}$$

تمرين أثبت أن $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n}$ متقاربة شرطياً

تمرين:

ادرس تقارب بالاطلاق للمتسلسلة التالية: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n))}{n^2}$

الحل : نأخذ متسلسلة الطويلات :

$$\sum\left|\frac{cisn}{n^2}\right|=\sum\frac{|cisn|}{|n^2|}=\sum\frac{1}{n^2}$$

وهي متقاربةلأنها ريمانية $(p=2\leq 1$ هذا يعني أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n))}{n}$ متقاربة بالاطلاق فهي متقاربة

إن هذه المتسلسلة تكافئ $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\cos(n))}{n^2}+i\frac{\sin(n))}{n^2})$

إن $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\cos(n))}{n^2}$ متقاربة وذلك حسب معيار المقارنة : $\left|\frac{\cos n}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}$

إن $\frac{1}{n^2}$ متقاربة وبالتالي $\frac{\cos(n))}{n^2}$ متقاربة

قد يأتي السؤال ثم استنتج تقارب $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ يكون الحل :

لنثبت أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cis\, n}{n^2}$ متقاربة نقول أنها تكافئ $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\cos(n))}{n^2}+i\frac{\sin(n))}{n^2}$

وحسب مبرهنة سابقة تكون الأجزاء الحقيقية والتخيلية لها متقاربة أي :

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ متقاربة

اختبارات التقارب بإطلاق

مبرهنة :

لتكن $\sum z_n$ متسلسلة عقدية

ولتكن $\sum \alpha_n$متسلسلة ذات حدود حقيقية غير سالبة ولنفرض وجود عددين N, K

بحيث يحقق $|z_n| \leq k\alpha_n$ لأجل كل $N \leq n$ عندئذ :

تقارب $\sum \alpha_n$ يقتضي التقارب بإطلاق لـ$\sum z_n$

الأثبات :

بفرض $\sum \alpha_n$ متقاربة عندئذ $\sum k\alpha_n$ متقاربة أيضاً $\overset{\text{حسب اختيار المقارنة}}{\Longleftarrow}$

$$\sum |z_n| \text{ متقاربة } \Leftarrow \sum z_n \text{ متقاربة بالإطلاق}$$

تذكرة اختبار المقارنة : $0 < a_n < b_n$

اذا تقاربت$\sum b_n \Leftarrow \sum a_n$متقاربة

اذا تباعدت$\sum a_n \Leftarrow \sum b_n$متباعدة

نتيجة: إذا وجد عدد حقيقي λ بحيث $0 < |\lambda| < 1$ لأجل جميع قيم n باستثناء عدد منته منها فإن $\sum z_n$ متقاربة بالإطلاق

مثال $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n cis\, n}{n^2}$ حيث a ثابت عقدي و $|a| \leq 1$ ما هي طبيعة المتسلسلة

الحل :

$$|z_n| = \left|\frac{a^n cis\, n}{n^2}\right| = \frac{|a^n||cis\, n|}{n^2} = \frac{|a^n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

وبما أن $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة فإنه :

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n cis\, n}{n^2}$ متقاربة بإطلاق حسب اختبار المقارنة

مثال $\frac{\left(\frac{i}{2}\right)^n cis\, n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n cis\, n}{n^2 2}$

$$|z_n| = \left|\frac{\left(\frac{i}{2}\right)^n cis\, n}{n^2}\right| = \frac{\left|\left(\frac{i}{2}\right)^n\right| |cis\, n|}{n^2} = \frac{\left|\left(\frac{i}{2}\right)^n\right|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

بما أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متقاربة فإن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n cis\, n}{n^2 2^n}$ متقاربة بإطلاق حسب اختبار المقارنة

3 اختبار دالامبير:

لتكن $\sum z_n$ متسلسلة عقدية وليكن $L = \overline{\lim}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$

$$l = \underline{lim}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$$

عندئذ:

1 $L < 1$ فإن $\sum z_n$ متقاربة بالإطلاق

2 $l > 1$ فإن $\sum z_n$ متباعدة

3 $l \geq 1 \geq L$ يفشل المعيار في تحديد طبيعة المتسلسلة وكحالة خاصة من 3 إذا كان $l = L = 1$ يفشل المعيار

2 اختبار كوشي ((الجذر النوني)) :

لتكن $\sum z_n$ متسلسلة عقدية و $l = \overline{\lim}\sqrt[n]{|z_n|}$

عندئذ :

1- $l < 1$ فإن $\sum z_n$ متقاربة بإطلاق

2- $l > 1$ فإن $\sum z_n$ متباعدة

3- $l = 1$ (حالة شك) يفشل الاختبار في تحديد طبيعة المتسلسلة

تمرين

بين فيما إذا كان اختبار كوشي يبين لنا طبيعة المتسلسلة التالية :

$$1 + a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots$$

حيث b, a ثابتان عقديان يحققان $0 < |a| < |b| < 1$

ثم عين مجموعهما في حال تقاربهما

الحل :

لنطبق دالمبير لمعرفة طبيعة المتسلسلة ولنأخذ المتتالية :

$$\left\{\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\right\}$$

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = |a|, \left|\frac{b}{a}\right| , |a| \left|\frac{a}{b}\right| , \left(\left|\frac{b}{a}\right|\right)^2 , |a| \left(\left|\frac{a}{b}\right|\right)^2 , \dots , \left(\frac{|b|}{|a|}\right)^n , |a| \left(\frac{|a|}{|b|}\right)^n , \dots$$

لنأخذ المتتالية الجزئية التالية :

$$\frac{|b|}{|a|} , \left(\frac{|b|}{|a|}\right)^2 , \dots\dots , \left(\frac{|b|}{|a|}\right)^2 ,$$

ومن التمرين نلاحظ أن $0 < |a| < |b| < 1$

وبالتالي فهذه متتالية هندسية حقيقية أسهاسها $\frac{|b|}{|a|}$ وبما أن $\frac{|b|}{|a|} > 1$ فرضا فإن :

$$\lim \left(\frac{|b|}{|a|}\right)^n = +\infty$$

$+\infty$ نقطة تجمع للمتتالية $\left\{\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\right\}$ ومنه فإن $l = \overline{\lim} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = +\infty \not< 1$

لنأخذ المتتالية الجزئية المتبقية : $|a|, |a| \left|\frac{a}{b}\right|, \dots \dots , |a| \left(\frac{|a|}{|b|}\right)^n$

وهذه متتالية هندسية حقيقية أساسها $\frac{|a|}{|b|}$ فهي متقاربة من الصفر لأن $\left|\frac{|a|}{|b|}\right| < 1$

ومنه فالصفر نقطة تجمع ل $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ وبالنتيجة فإن $l = \lim\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = 0 \ngtr 1$

ويفشل دالمبير بتعين طبيعة المتسلسلة

يفشل اختبار دالمبير سنلجأ إلى اختبار كوشي لأنه أقوى من اختبار دالمبير في تحديد طبيعة المتسلسلة

$$, \sqrt[n]{1} = 1 , \sqrt{|a|} , \sqrt[3]{|b|} , \sqrt[4]{|a^2|} , \sqrt[5]{|b^2|}$$

$$1 , |a|^{\frac{1}{2}} , |b|^{\frac{1}{3}} , |a|^{\frac{1}{2}} , |b|^{\frac{2}{5}} , |a|^{\frac{1}{2}} , \dots$$

و هنا إذا أردنا إثبات تباعد متتالية يجب أيجاد متتاليتين تسعى كل منها إلى النهاية

إن المتتالية الجزئية (ذات الحدود الزوجية):

$$|a|^{\frac{1}{2}} , |a|^{\frac{1}{2}} \ , |a|^{\frac{1}{2}} , \dots . \longrightarrow |a|^{\frac{1}{2}}$$

أي أن المتتالية الجزئية ثابتة فهي متقاربة من $|a|^{\frac{1}{2}}$ ، $|a|^{\frac{1}{2}}$ نقطة تجمع ل $\{\sqrt[n]{|z_n|}\}$وكلن هنا لا نعلم اذا كانت أصغر قيمة تجمع أو أكبر قيمة تجمع .

كما أن المتتالية الجزئية (ذات الحدود الفردية) :

$$1 , |b|^{\frac{1}{3}} , |b|^{\frac{2}{5}} \ , |b|^{\frac{3}{7}} , \dots , |b|^{\frac{n}{2n+1}} , \dots . . \longrightarrow |b|^{\frac{1}{2}}$$

و هذه المتتالية متقاربة ونهايتها $|b|^{\frac{1}{2}}$ وأن $|b|^{\frac{1}{2}}$ هي نقطة تجمع ل $\{\sqrt[n]{|z_n|}\}$لأن $\lim \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$

أثبت أن $|a|^{\frac{1}{2}}$, $|b|^{\frac{1}{2}}$ هما نقطتا تجمع وحيدتان للمتتالية $\sqrt[n]{|z_n|}$

((إن نقاط التجمع لمتتالية هي نهايات المتتاليات الجزئية المتقاربة منها))

إن كل متتالية جزئية من $\{\sqrt[n]{|z_n|}\}$

إما أن تختلف بعدد منتهي عن حدود $\{, |a|^{\frac{1}{2}}\}$وبالتالي سوف تتقارب من $|a|^{\frac{1}{2}}$,أو تختلف بعدد منتهي عن حدود $\{|b|^{\frac{n}{2n+1}}\}$

وبالتالي سوف تتقارب من $|b|^{\frac{1}{2}}$ أو ستبقى حاوية على عدد غير منتهي من حدود $\{|b|^{\frac{n}{2n+1}}\}\{, |a|^{\frac{1}{2}}\}$,

عندئذ المتتالية تمتلك نهاية وبالتالي سوف تكون متباعدة

أي كل المتتاليات الجزئية من $\{\sqrt[n]{|z_n|}\}$ المتقاربة ستتقارب إما من $|a|^{\frac{1}{2}}$, أو من $|b|^{\frac{1}{2}}$ وبالتالي نقطتا تجمع الوحيدتان للمتتالية هما $|a|^{\frac{1}{2}}, |b|^{\frac{1}{2}}$ و وبالتالي لما كان $|a|^{\frac{1}{2}} < |b|^{\frac{1}{2}}$, كانت أكبر نقطة تجمع للمتتالية $\{\sqrt[n]{|z_n|}\}$ وبالتالي :

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|z_n|} = |b|^{\frac{1}{2}} < 1$$

المتسلسلة متقاربة بالاطلاق ((نجد اختبار كوشي في تحديد طبيعة المتسلسلة))

وبما أن المتسلسلة متقاربة بالاطلاق نستطيع القيام بالتبديل و التجميع على حدودها ولن يؤثر ذلك على مجموعها ولا على تقاربها وبالتالي المتسلسلة :

$$1 + a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots =$$

$$= \underbrace{(1 + a + a^2 + \cdots)}_{\text{متسلسلة هندسية أساسها } a \text{ و حدها الأول } 1} + \underbrace{(b + b^2 + b^3 + \cdots)}_{\text{متسلسلة هندسية أساسها } b \text{ و حدها الأول } b}$$

ملاحظة : هذه المساواة صحيحة لأن المتسلسلة متقاربة بالإطلاق ولو كانت متقاربة لا يجوز التفرقة

$$= \frac{1}{1-a} + \frac{b}{1-b} = \frac{1 \cancel{- b} \cancel{+ b} - ab}{(1-a)(1-b)} = \frac{1-ab}{(1-a)(1-b)}$$

بالتالي اختبار كوشي ينجح من تعيين طبيعة المتسلسلة .

انتهت المحاضرة

إعداد: رشا القرصة و تقى إسماعيل و خديجة الرفاعي