معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثانية

التحليل3

المحاضرة5

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2019-2023

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: الخامسة

◄ عنوان المحاضرة: المتتالية المتقاربة بانتظام

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- مبرهنتان
2- نتائج
3- مثال

خواص المتتالية المتقاربة بانتظام

مبرهنة(1): لتكن $\{f_n(x)\}_{n\in N}$ متتالية التوابع معرفة على $I \in R$ ومتقاربة بانتظام ومتقاربة من تابع النهاية $f(x)$ على المجال I ، فإذا كانت حدود هذه المتتالية مستمرة على المجال على المجال I فإن تابع النهاية $f(x)$ تابع مستمر على I .

الإثبات:

لتكن $x \in I$ بما أن المتتالية المتقاربة بانتظام على I فإنه يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد $N_0(\varepsilon) \neq 0$ بحيث يتحقق $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

لكل $n \geq N_0(\varepsilon)$ ولأجل كل $x \in I$

وبما أن حدود المتتالية توابع مستمرة I من أجل كل $x_0 \in I$ و $n \geq N_0(\varepsilon)$

يوجد لكل $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ عدد $\delta \neq 0$ بحيث إذا تحقق $|x - x_0| < \delta$ فإن $|f_n(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

لنبرهن أن $f(x)$ تابع مستمر على I

أي لنتثبت أن $\forall\, \varepsilon > 0 \,;\, \exists\, \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$$\le \underbrace{|f(x)-f_n(x)|}_{\text{تقارب منتظم}} + \underbrace{|f_n(x)-f_n(x_0)|}_{\text{استمرار}} + \underbrace{|f_n(x_0)-f(x_0)|}_{\text{تقارب منتظم}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

إذا تحقق شرط الاستمرار ... فإن التابع $f(x)$ مستمرا على I .

مبرهنة(2): لتكن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ المعرفة على المجال $I \in R$ بفرض أنها متقاربة بانتظام من تابع النهاية $f(x)$ على I فإذا كانت حدودها توابع محدودة على المجال I فإن تابع النهاية تابع محدود على I

الإثبات:

بفرض $\varepsilon > 0$ وبسبب التقارب المنتظم فإنه يوجد عدد $N_0(\varepsilon) \neq 0$ بحيث يتحقق

$|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$ لكل $n \ge N_0$ ، $\forall\, x \in I$ بما أن حدود المتتالية توابع محدودة على I فإنه لأجل $n \ge N_0$ يوجد عدد $K > 0$ بحيث يكون $\forall\, x \in I : |f_n(x)| \le K$

لنثبت أن تابع النهاية محدود على I

$$|f(x)| = |f(x)-f_n(x)+f_n(x)|$$
$$\le |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)|$$
$$< \varepsilon + K = M$$

إذا يوجد عدد $M > 0$ بحيث يحقق $\forall\, x \in I : |f(x)| < \mathrm{M}$ وتابع النهاية $f(x)$ محدود

نتائج:

1) إذا كانت $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع مستمرة على المجال I ، وتابع النهاية $f(x)$ غير مستمر على I فيكون التقارب نقطي وليس تقارباً منتظماً.

2) إذا كان $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع محدودة وكان تابع النهاية $f(x)$ غير محدود فحتماً التقارب هو تقارب نقطي.

3) إذا كان تابع النهاية $f(x)$ لتوابع مستمرة على I مستمراً فإنه ليس من الضروري أن تكون متقاربة بانتظام على I.

مثال: $f_n(x) = x^n$ معرف على $I =]0,1[$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $N_0 \neq 0$

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n < \varepsilon$$

نأخذ لوغاريتم الطرفين ثم وحسب خواص اللوغاريتم : $ln\, x^n < ln\, \varepsilon \;\Rightarrow n\, ln\, x < ln\, \varepsilon$

$$n > \frac{ln\, \varepsilon}{ln\, x} = N(\varepsilon, x)$$

وجدنا أن N_0 تتعلق (ε, x) والتقارب هو تقارب نقطي رغم أن حدود المتتالية توابع مستمرة وتابع النهاية هو التابع الصفري تابع مستمر .

ملاحظة: إذا كانت متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على I

فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يتحقق

$$f(x) - \varepsilon < f(x) < f(x) + \varepsilon$$

$$n \geq N_0(\varepsilon) \quad , \quad x \in I$$

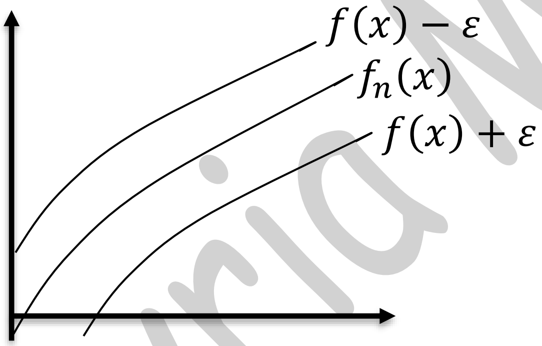
المعنى الهندسي:

في التقارب المنتظم يكون جميع منحنيات التابع $f_n(x)$

محصورة بين المنحنيين $f(x) + \varepsilon$ ، $f(x) - \varepsilon$

وفي التقارب النقطي لا تقع جميع المنحنيات لتوابع المتتالية

ضمن هذا الشريط.



انتهت المحاضرة

إعداد: رنا شورية *علا الدالاتي *نذير تيناوي