معك نحو

النجم

Syria Math Team

البنى الجبرية1

المحاضرة 12

السنة الثانية

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل:

هاتف – واتساب: 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2nd year

◄ دكتور المادة: فادي أبو حرب

◄المحاضرة : الثانية عشر ◄ عنوان المحاضرة: مبرهنات

تمهيدية:

لتكن G زمرة ، ان تقاطع اية جملة من الزمر الجزئية من G هو زمرة جزئية من G

البرهان:

لتكن $\{A_i\ ; i \in I\}$ جماعة من الزمر الجزئية من G ان $\bigcap_{i\in I} A_i$ هو مجموعة جزئيةغير خالية لان $e \in A_i\ , \forall i \in I$

وبالتالي $e \in \bigcap_{i\in I} A_i$

ليكن $x,y \in \bigcap_{i\in I} A_i$ عندئذٍ أياً كان $i \in I$ فإن $x,y \in A_i$ وكون A_i زمرة جزئية فإن $x.y^{-1} \in A_i$

وبالتالي $x.y^{-1} \in \bigcap_{i\in I} A_i$ ومنه $\bigcap_{i\in I} A_i$ زمرة جزئية من G

تمهيدية:

لتكن G زمرة و $\Gamma = \{A_i\ , i \in I\}$ جماعة من الزمر الجزئية من G اذا كانت الجماعة Γ مرتبة كلياً بالنسبة لعلاقة الاحتواء فإن $\bigcup_{i\in I} A_i$ تشكل زمرة جزئية من G

البرهان:

واضح ان $\bigcup_{i\in I} A_i$ غير خالية لنثبت انه اياً كان $x,y \in \bigcup_{i\in I} A_i$ فإن $x.y^{-1} \in \bigcup_{i\in I} A_i$

ليكن $x,y \in \bigcup_{i\in I} A_i$ عندئذٍ يوجد i,j بحيث $x \in A_j\ , y \in A_j$ وبما ان Γ مرتبة كلياً فإنه اما $A_i \subseteq A_j$

او $A_j \subseteq A_i$ لنفرض ان $A_i \subseteq A_j$ عندئذٍ $x,y \in A_j$ وبما ان A_j زمرة جزئية فإن $x.y^{-1} \in A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$

ومنه $\bigcup_{i\in I} A_i$ زمرة جزئية من G

مثال :

$$week = \{\underbrace{sat}_{\substack{a \\ a^8}}, \underbrace{sun}_{\substack{a^2 \\ a^9}}, \underbrace{mon}_{\substack{a^3 \\ a^{10}}}, \underbrace{tue}_{a^4}, \underbrace{win}_{a^5}, \underbrace{the}_{a^6}, \underbrace{fri}_{a^7}\}$$

لكن $a^i = a^j\ , 9 \neq 2$

زمرتا الجمع والضرب بالمقاس n :

زمرة الجمع بالمقاس (n) : Z_n

لتكن $n \geq 1$ عدد صحيح ولنأخذ المجموعة:

$$Z_n = \{0,1,2, \dots (n-1)$$

لنعرف على Z_n عملية الجمع بالمقاس n والتي سوف نرمز لها بالشكل $\oplus$

نعرف العلاقة بالشكل الاتي:

$$a \oplus b = \begin{cases} a+b & ; \quad a+b < n \\ a+b-n & ; \quad a+b \geq n \end{cases}$$

ولكن التعبير عنها بالشكل التالي:

$$a \oplus b = a + b \; mod n$$

مثال:

من اجل $n = 6$ نميز مايلي جدول الجمع بالمقاس 6

$mod\ 6$	0	1	2	3	4	5
0	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	5
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	0
2	**2**	**3**	**4**	**5**	**0**	1
3	**3**	**4**	**5**	**0**	**1**	2
4	**4**	**5**	**0**	**1**	**2**	3
5	**5**	**0**	**1**	**2**	**3**	4

ان 0 هو الحيادي بالنسبة لهذه العملية. كما ان نظير 3 هو 3 هو $-3 = 3$

نظير 5 هو $-5 = 1$

• زمرة الضرب بالمقاس n :

ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً ، ولنأخذ المجموعة:

$$U(n) = \{m : m \in N^* \; ; m < n \; , gcd(m,n) = 1\}$$

لنعرف على المجموعة $U(n)$ عملية ضرب بالمقاس n والذي نرمز له ب $\otimes$ بالشكل التالي:

Syria Math Team

$$a \otimes b = a.b \ mod n = r$$

مثال:

$$U(10) = \{1,3,7,9\}$$

$mod\ 10$	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

الحيادي هنا هو الواحد ، مقلوب 7 ويوجد لكل عنصر مقلوب :

$3^{-1} = 7$ $\quad$ $7^{-1} = 3$

$1^{-1} = 1$ $\quad$ $9^{-1} = 9$

مبرهنة:

ليكن $n \geq 1$ عدداً صحيحاً، ولتكن $D = \{1,2, \dots . (n-1)\}$ الشرط اللازم والكافي كي يكون D زمرة بالنسبة الى عملية الضرب بالمقاس n هو ان يكون n اولي.

البرهان:

- **لزوم الشرط:** لنفرض ان D زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس n ، ولنثبت ان n اولي ، ولنفرض جدلاً ان n ليس اولي وبالتالي يوجد $k,t \in Z$ بحيث $n = k.t$

وان $1 < k,t < n$ ومنه $k,t \in D$ لنضع الان: $k \otimes t = k.t \ mod \ n = n \ mod \ n = 0 \notin D$

أي: $k \otimes t \notin D$ وهذا يناقض كون D زمرة فالفرض الجدلي خاطئ و n اولي

- **كفاية الشرط:**

لنفرض ان n اولي ولنثبت ان D زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس n يكفي لاثبات ذلك ان نثبت $D = U(n)$

واضح ان $U(n) \subseteq D$ ليكن $a \in D$ عندئذٍ $1 < a < n$ أي ان n لايقسم a وبما ان n اولي فإن $\gcd(a,n) = 1$

بالتالي $a \in U(n)$ وبالتالي $D \subseteq U(n)$ ومنه نجد ان $D = U(n)$ وبالتالي D زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس n

انتهت المحاضرة

Syria Math Team