

(1) أثبت أن المحور الحقيقي هو فضاءً مترياً.

الحل:

أياً كان  $x$  و  $y$  و  $z$  من  $\mathbb{R}$  فإن:

$$1) |x - y| \geq 0 \Rightarrow d(x, y) \geq 0$$

$$2) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$3) d(x, y) = |x - y| = |-(y - x)| = |-1||y - x| = |y - x| = d(y, x)$$

$$4) d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$$

(2) هل تحدّد المساواة  $d(x, y) = (x - y)^2$  متراً على مجموعة الأعداد الحقيقية؟

الحل:

نلاحظ أن الشروط الثلاثة الأولى محقّقة.

لكن:

$$d(0,4) = (0 - 4)^2 = (-4)^2 = 16$$

$$d(0,2) = (0 - 2)^2 = (-2)^2 = 4$$

$$d(2,4) = (2 - 4)^2 = (-2)^2 = 4$$

أي:

$$d(0,4) = 16 > 8 = 4 + 4 = d(0,2) + d(2,4)$$

مراجعة المثلث غير محقّقة دوماً، ومنه المساواة السابقة لا تحدّد متراً على مجموعة الأعداد الحقيقية.

(3) بين أن  $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$  تحدّد متراً على مجموعة الأعداد الحقيقية.

الحل:

أياً كان  $x$  و  $y$  و  $z$  من  $\mathbb{R}$  فإن:

$$1) |x - y| \geq 0 \Rightarrow \sqrt{|x - y|} \geq 0 \Rightarrow d(x, y) \geq 0$$

$$2) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x - y|} = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$3) d(x, y) = \sqrt{|x - y|} = \sqrt{|y - x|} = d(y, x)$$

$$4) |x - y| \leq |x - z| + |z - y| + 2\sqrt{|x - z|}\sqrt{|z - y|} = \left(\sqrt{|x - z|} + \sqrt{|z - y|}\right)^2$$

بجذر الطرفين

$$\Leftrightarrow \sqrt{|x - y|} \leq \sqrt{|x - z|} + \sqrt{|z - y|} \Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

(8) بين أنه يمكن تعريف مترك  $d$  على الفضاء  $\mathcal{C}[a, b]$  بالمساواة:

$$d(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$$

الحل:

تذكّر:

كل دالة مستمرة قابلة للمكاملة.

إذا كان  $\int_a^b f(t) dt = 0$  و  $f$  مستمرة على  $[a, b]$  و  $f \geq 0$  على  $[a, b]$  فإن  $f \equiv 0$  (\*).

أيًا كان  $x$  و  $y$  و  $z$  من  $\mathcal{C}[a, b]$  فإن:

$$1) \forall t \in [a, b] : |x(t) - y(t)| \geq 0 \Rightarrow \int_a^b |x(t) - y(t)| dt \geq 0 \Rightarrow d(x, y) \geq 0$$

$$2) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b |x(t) - y(t)| dt = 0 \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \forall t \in [a, b] : |x(t) - y(t)| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\forall t \in [a, b] : x(t) - y(t) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [a, b] : x(t) = y(t) \Leftrightarrow x = y$$

$$3) d(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt = \int_a^b |y(t) - x(t)| dt = d(y, x)$$

$$4) \forall t \in [a, b] : |x(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \Rightarrow$$

$$\int_a^b |x(t) - y(t)| dt \leq \int_a^b |x(t) - z(t)| dt + \int_a^b |z(t) - y(t)| dt \Rightarrow$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

## صفحة 11

(14) بيّن أنّ (3م) و (4م) من موضوعات المترك تستنتجان من (2م) ومن المتراجحة:

$$d(x, y) \leq d(z, x) + d(z, y) \quad (*)$$

الحل:

خذ  $z = y$  في (\*):

$$d(x, y) \leq d(y, x) + d(y, y) \stackrel{2م}{\cong} d(y, x) + 0 \Rightarrow d(x, y) \leq d(y, x) \quad (1)$$

من (\*) إنّ:

$$d(y, x) \leq d(z, y) + d(z, x) \quad (**)$$

خذ  $z = x$  في (\*\*):

$$d(y, x) \leq d(x, y) + d(x, x) \stackrel{2م}{\cong} d(x, y) + 0 \Rightarrow d(y, x) \leq d(x, y) \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد أنّ  $d(x, y) = d(y, x)$  (3م).

من (\*) إنّ:

$$d(x, y) \leq d(z, x) + d(z, y) \stackrel{3م}{\cong} d(x, z) + d(z, y)$$

وهي (4م).

(15) بيّن أنّ كون المترك أكبر من الصفر أو يساويه تنتج من (2م) - (4م).

الحل:

أيّا كان  $x$  و  $y$  و  $z$  من  $\mathbb{X}$ ، من (4م) إنّ:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

بأخذ  $x = y$  في المتراجحة السابقة:

$$0 \stackrel{2م}{=} d(x, x) \leq d(x, z) + d(z, x) \stackrel{3م}{=} 2d(x, z)$$

ومنه  $d(x, z) \geq 0$ .

## صفحة 20

(10) تعرّف المسافة  $D(x, B)$  بين النقطة  $x$  والمجموعة غير الخالية  $B$  في  $(\mathbb{X}, d)$  بالمساواة:

$$D(x, B) = \inf_{b \in B} d(x, b)$$

بين أنّه أيّاً كان العنصران  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{X}$  فإنّ:

$$|D(x, B) - D(y, B)| \leq d(x, y)$$

الحل:

ليكن  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{X}$ ، لأيّ  $b \in B$  فإنّ:

$$D(x, B) = \inf_{b \in B} d(x, b) \leq d(x, b) \leq d(x, y) + d(y, b)$$

لذا، لأيّ  $b \in B$  فإنّ:

$$D(x, B) \leq d(x, y) + d(y, b)$$

ومنه:

$$D(x, B) \leq d(x, y) + \inf_{b \in B} d(y, b) = d(x, y) + D(y, B)$$

التي بدورها تقتضي أنّ:

$$D(x, B) - D(y, B) \leq d(x, y) \quad (1)$$

بالمبادلة بين  $x$  و  $y$  وإعادة المناقشة السابقة نحصل على:

$$D(y, B) - D(x, B) \leq d(x, y) \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد أنّ:

$$|D(x, B) - D(y, B)| \leq d(x, y)$$

## صفحة 21

(11) إذا كان  $(\mathbb{X}, d)$  أيّ فضاءٍ متري، فأثبت أنّ المساواة:

$$\varrho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

تحدّد متراً آخر على  $\mathbb{X}$ ، وأنّ  $\mathbb{X}$  محدودةٌ في المترك  $\varrho$ .

الحل:

أيّاً كان  $x$  و  $y$  و  $z$  من  $\mathbb{X}$  فإنّ:

$$1) d(x, y) \geq 0, 1 + d(x, y) \geq 1 > 0 \Rightarrow \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \geq 0 \Rightarrow \varrho(x, y) \geq 0$$

$$2) \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$3) \varrho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = \varrho(y, x)$$

$$4) \varrho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 1 - \frac{1}{1 + d(x, y)} \leq 1 - \frac{1}{1 + d(x, z) + d(z, y)}$$

$$= \frac{d(x, z) + d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} = \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)}$$

$$\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(z, y)} = \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$$

لأيّ  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{X}$  فإنّ:

$$0 \leq d(x, y) < 1 + d(x, y) \quad \overset{\text{بالتقسيم على}}{\Rightarrow} \quad 0 \leq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \varrho(x, y) < 1$$

$1 + d(x, y) \neq 0$

ومنه  $\delta(\mathbb{X}) = \sup_{x, y \in \mathbb{X}} \varrho(x, y) = 1 < +\infty$  وبالتالي  $\mathbb{X}$  محدودةٌ في المترك  $\varrho$ .

### صفحة 30

(4) بين أن الشرط اللازم والكافي كي تكون كل مجموعة غير خالية  $A$  من فضاء متري  $(\mathbb{X}, d)$  مفتوحة هو أن تكون اجتماعاً لكراتٍ مفتوحة.

الحل:

لنفرض أن  $A$  مجموعة مفتوحة، لنبرهن أن  $A$  اجتماع لكراتٍ مفتوحة.

بما أن  $A$  مجموعة مفتوحة لأي  $a \in A$  توجد كرة مفتوحة  $B(a; r)$  (لأجل  $r > 0$  مناسب) بحيث:

$$B(a; r) \subseteq A$$

ومنه:

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\} \subseteq \bigcup_{a \in A} B(a; r) \subseteq A \quad \Rightarrow \quad A = \bigcup_{a \in A} B(a; r)$$

بالتالي  $A$  اجتماع لكراتٍ مفتوحة.

لنفرض أن  $A$  اجتماع لكراتٍ مفتوحة، لنبرهن أن  $A$  مجموعة مفتوحة.

بما أن  $A$  اجتماع لكراتٍ مفتوحة فإن  $A = \bigcup_{i \in I} B(a_i; r_i)$ .

لتكن  $x \in A$  عندئذ يوجد  $i_0 \in I$  (واحد على الأقل) بحيث أن  $x \in B(a_{i_0}; r_{i_0})$  ولكن  $B(a_{i_0}; r_{i_0})$  مجموعة مفتوحة تحوي  $x$ ، فتوجد كرة مفتوحة  $B(x; \varepsilon)$  مركزها  $x$  ونصف قطرها  $\varepsilon > 0$  بحيث أن:

$$x \in B(x; \varepsilon) \subseteq B(a_{i_0}; r_{i_0}) \subseteq A$$

ولما كانت  $x$  نقطة كيفية من  $A$ ، فإن  $A$  مجموعة مفتوحة.

### صفحة 32

(14) أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق  $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  مستمراً هو أن تكون الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة  $\mathcal{M}$  في  $\mathbb{Y}$  مجموعة مغلقة في  $\mathbb{X}$ .

الحل:

لنفرض أن التطبيق  $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  مستمر، أي أن الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة  $\mathcal{O}$  في  $\mathbb{Y}$  مجموعة مفتوحة في  $\mathbb{X}$ ، ولنبرهن أن الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة  $\mathcal{M}$  في  $\mathbb{Y}$  مجموعة مغلقة في  $\mathbb{X}$ .

لتكن  $\mathcal{M}$  مجموعة مغلقة في  $\mathbb{Y}$  فإن  $\mathcal{M}^c$  مجموعة مفتوحة في  $\mathbb{Y}$ ، وبما أن التطبيق  $T$  مستمر فإن  $T^{-1}(\mathcal{M}^c)$  مجموعة مفتوحة في  $\mathbb{X}$ ، ونعلم أن  $T^{-1}(\mathcal{M}^c) = (T^{-1}(\mathcal{M}))^c$ ، لذا  $(T^{-1}(\mathcal{M}))^c$  مجموعة مفتوحة في  $\mathbb{X}$ ، وبالتالي  $T^{-1}(\mathcal{M})$  مجموعة مغلقة في  $\mathbb{X}$ .

لنفرض أن الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة  $\mathcal{M}$  في  $\mathbb{Y}$  مجموعة مغلقة في  $\mathbb{X}$ ، ولنبرهن أن التطبيق  $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  مستمر، أي أن الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة  $\mathcal{O}$  في  $\mathbb{Y}$  مجموعة مفتوحة في  $\mathbb{X}$ .

لتكن  $\mathcal{O}$  مجموعة مفتوحة في  $\mathbb{Y}$  فإن  $\mathcal{O}^c$  مجموعة مغلقة في  $\mathbb{Y}$ ، ومنه  $T^{-1}(\mathcal{O}^c)$  مجموعة مغلقة في  $\mathbb{X}$ ، ونعلم أن  $T^{-1}(\mathcal{O}^c) = (T^{-1}(\mathcal{O}))^c$ ، لذا  $(T^{-1}(\mathcal{O}))^c$  مجموعة مغلقة في  $\mathbb{X}$ ، ومنه  $T^{-1}(\mathcal{O})$  مجموعة مفتوحة في  $\mathbb{X}$ ، وبالتالي التطبيق  $T$  مستمر.

## صفحة 41

(2) إذا كانت  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية لكوشي ووجد لها متتالية جزئية  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  متقاربة من  $x$ ، فبين أن المتتالية  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة وأن لها النهاية  $x$  نفسها.

الحل:

لتكن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية لكوشي من عناصر الفضاء  $(\mathbb{X}, d)$ ، ولتكن  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  متتالية جزئية من  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة من  $x$ ، وليكن  $\varepsilon > 0$ .

بما أن المتتالية  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  متقاربة من  $x$  يوجد  $\mathcal{K} \in \mathbb{N}$  بحيث أن  $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$  لأي  $k \geq \mathcal{K}$ .

بما أن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية كوشي يوجد  $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$  بحيث أن  $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$  لأي  $m, n \geq \mathcal{N}$ .

لنختر  $k \geq \mathcal{K}$  بحيث أن  $n_k \geq \mathcal{N}$ ، عندئذٍ لأي  $n \geq \mathcal{N}$  فإن:

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ومنه المتتالية  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة ونهايتها  $x$ .

## صفحة 51

(1) ليكن  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين بحيث يكون  $a < b$ . أثبت أن الفترة المفتوحة  $]a, b[$  هي فضاءً جزئياً غير تاماً من  $\mathbb{R}$ ، في حين أن الفترة المغلقة  $[a, b]$  تامة.

الحل:

لنأخذ  $(x_n = b - \frac{b-a}{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية من عناصر الفترة  $]a, b[$  متقاربة من  $b \notin ]a, b[$ ، لذا الفترة  $]a, b[$  ليست مجموعةً جزئيةً مغلقةً من الفضاء المترى التام  $\mathbb{R}$ ، فحسب المبرهنة (7.4.1) إن  $]a, b[$  فضاءً جزئياً غير تاماً من  $\mathbb{R}$ .

إن  $[a, b]$  مجموعةً جزئيةً مغلقةً (لأن  $([a, b])^c$  مجموعةً مفتوحةً) من الفضاء المترى التام  $\mathbb{R}$ ، فحسب المبرهنة (7.4.1) إن  $[a, b]$  فضاءً جزئياً تاماً من  $\mathbb{R}$ .

## صفحة 52

(3) ليكن  $\mathcal{M}$  فضاءً جزئياً من  $\ell^\infty$  مؤلفاً من كل المتتاليات  $x = (\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  التي حدود كل منها أصفار باستثناء عدد منتهٍ من هذه الحدود على الأكثر. أوجد متتالية لكوشي في  $\mathcal{M}$  غير متقاربة في  $\mathcal{M}$ ، الأمر الذي يبين أن  $\mathcal{M}$  غير تاماً.

الحل:

لتكن  $(x_n = (\xi_j^{(n)})_{j \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$  متتاليةً من عناصر  $\mathcal{M}$  مُعرَّفةً كما يلي:

$$\xi_j^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{j} & : j \leq n \\ 0 & : j > n \end{cases}$$

أي:

$$x_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$$

$$x_2 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \dots\right)$$

$$x_3 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, 0, \dots\right)$$

.....

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots\right)$$

بفرض  $m > n$  فإن:

$$d(x_n, x_m) = \sup \left\{ |1 - 1|, \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right|, \dots, \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right|, \left| 0 - \frac{1}{n+1} \right|, \dots, \left| 0 - \frac{1}{m} \right|, |0 - 0|, \dots \right\}$$

$$d(x_n, x_m) = \frac{1}{n+1}$$

وإذا كان  $n > m$  فإن:

$$d(x_n, x_m) = \frac{1}{m+1}$$

في الحالتين:

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

لذا  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية لكوشي، لكنها غير متقاربة في  $\mathcal{M}$ ، لأن:

$$x_n = \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x = \left( \frac{1}{j} \right)_{j \in \mathbb{N}} = \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots \right) \notin \mathcal{M}$$

في  $l^\infty$  لدينا  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ ، لكن  $x \notin \mathcal{M}$ ، وبالتالي  $\mathcal{M}$  فضاء غير تام.

## صفحة 82

(3) ليكن  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  فضاءً مُنظَّمًا، لأي  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{X}$  أثبت أن:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

الحل:

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \quad (1)$$

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \Rightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\| \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

## صفحة 84

(11) بين أن الكرة الواحدة المغلقة  $\bar{B}(0; 1) = \{x \in \mathbb{X} : \|x\| \leq 1\}$  في فضاء منظم  $\mathbb{X}$  محدبة.

الحل:

ليكن  $x$  و  $y$  من  $\bar{B}(0; 1)$  فإن  $\|x\| \leq 1$  و  $\|y\| \leq 1$ ، وليكن  $\alpha \in [0, 1]$  فإن:

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y\| \leq \|\alpha x\| + \|(1 - \alpha)y\| = |\alpha|\|x\| + |1 - \alpha|\|y\| \leq \alpha + 1 - \alpha = 1$$

نلاحظ أن  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \bar{B}(0; 1)$  وبالتالي  $\alpha \in [0, 1]$  لأي  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \bar{B}(0; 1)$  مجموعة محدبة.

## صفحة 91

(5) برهن أنه إذا كان  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$  و  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$  فإن  $x_n + y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x + y$ .

أثبت أنه إذا كان  $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$  و  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$  فإن  $\alpha_n x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha x$ .

الحل:

بما أن  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$  و  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$  فإن  $\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  و  $\|y_n - y\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ، ومنه:

$$\|x_n + y_n - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

وبالتالي  $x_n + y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x + y$ .

بما أن  $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$  و  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$  فإن  $|\alpha_n - \alpha| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  و  $\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ، والمتتالية

$(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  محدودة (كونها متقاربة)، أي يوجد  $c > 0$  بحيث أن  $|\alpha_n| \leq c$  لأي  $n \in \mathbb{N}$ ، ومنه:

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x\| = \|\alpha_n(x_n - x) + (\alpha_n - \alpha)x\|$$

$$\leq \|\alpha_n(x_n - x)\| + \|(\alpha_n - \alpha)x\| = |\alpha_n|\|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha|\|x\|$$

$$\leq c\|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha|\|x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c(0) + (0)\|x\| = 0$$

وبالتالي  $\alpha_n x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha x$ .

(6) أثبت أن اللصاقة  $\bar{Y}$  للفضاء الجزئي  $Y$  من فضاء منظم  $\mathbb{X}$  هي أيضاً فضاء متجهي جزئي.

الحل:

ليكن  $x$  و  $y$  من  $\bar{Y}$ ، حسب مبرهنة النقطة الملاصقة توجد متاليتان  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  و  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  من عناصر  $Y$  بحيث أن  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$  و  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$  أي  $\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  و  $\|y_n - y\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ، وليكن  $\alpha$  و  $\beta$  عددين من الحقل  $\mathcal{K}$ ، فإن  $(\alpha x_n + \beta y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية من عناصر  $Y$ ، و:

$$\begin{aligned} \|\alpha x_n + \beta y_n - (\alpha x + \beta y)\| &= \|(\alpha x_n - \alpha x) + (\beta y_n - \beta y)\| = \|\alpha(x_n - x) + \beta(y_n - y)\| \\ &\leq \|\alpha(x_n - x)\| + \|\beta(y_n - y)\| = |\alpha| \|x_n - x\| + |\beta| \|y_n - y\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\alpha|(0) + |\beta|(0) = 0 \end{aligned}$$

والذي يبيّن أن المتتالية  $(\alpha x_n + \beta y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  من عناصر  $Y$  متقاربة من  $\alpha x + \beta y$  وبالتالي  $\alpha x + \beta y \in \bar{Y}$  أي  $\bar{Y}$  فضاءً متجهيًّا.

$$(7) \text{ يبيّن أن تقارب المتسلسلة } \|x_1\| + \|x_2\| + \dots \text{ قد لا يقتضي تقارب المتسلسلة } x_1 + x_2 + \dots$$

الحل:

ليكن  $\mathcal{M}$  فضاءً جزئياً من  $\ell^\infty$  مؤلفاً من كل المتتاليات  $x = (\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  التي حدود كل منها أصفار باستثناء عدد منتهٍ من هذه الحدود على الأكثر.

لتكن  $(x_n = (\xi_j^{(n)})_{j \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية من عناصر  $\mathcal{M}$  معرّفة كما يلي:

$$\xi_j^{(n)} = \begin{cases} 1 & : j = n \\ \frac{1}{j^2} & : j \neq n \end{cases}$$

أي:

$$x_1 = \left( \frac{1}{1^2}, 0, 0, \dots, 0, \dots \right)$$

$$x_2 = \left( 0, \frac{1}{2^2}, 0, \dots, 0, \dots \right)$$

$$x_3 = \left( 0, 0, \frac{1}{3^2}, \dots, 0, \dots \right)$$

.....

$$x_n = \left( 0, 0, 0, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots \right)$$

نلاحظ أنَّ  $\|x_n\| = \frac{1}{n^2}$  لأي  $n \in \mathbb{N}$ ، ومنه:

$$\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\| + \cdots = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

وهذه المتسلسلة متقاربة.

لتكن  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة  $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + \cdots$ ، أي:

$$S_n = \sum_{N=1}^n x_N = \left( \frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, 0, \dots \right)$$

نلاحظ أنَّ:

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S = \left( \frac{1}{j^2} \right)_{j \in \mathbb{N}} = \left( \frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n+1)^2}, \dots \right)$$

لكن  $S \notin \mathcal{M}$ ، ومنه المتسلسلة  $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + \cdots$  غير متقاربة. (السبب  $\mathcal{M}$  غير تام).

(8) إذا اقتضى التقارب المطلق لأي متسلسلة في فضاء مُنظَّم تقارب هذه المتسلسلة، فيبين أنَّ  $\mathbb{X}$  فضاء تام.

الحل:

لتكن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية لكوشي من عناصر الفضاء  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ ، عندئذٍ:

$$\text{لأي } k \in \mathbb{N} \text{ يوجد } \mathcal{N}_k \in \mathbb{N} \text{ بحيث أن } \frac{1}{2^k} < \|x_m - x_n\| \text{ لأي } m, n \geq \mathcal{N}_k.$$

إنَّ المتتالية  $(\mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  متزايدة، و  $(x_{\mathcal{N}_k})_{k \in \mathbb{N}}$  متتالية جزئية من المتتالية  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

لنعرف، إنطلاقاً من المتتالية  $(x_{\mathcal{N}_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ، المتتالية  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  على النحو التالي:

$$y_1 = x_{\mathcal{N}_1}, \quad y_2 = x_{\mathcal{N}_2} - x_{\mathcal{N}_1}, \quad y_3 = x_{\mathcal{N}_3} - x_{\mathcal{N}_2}, \quad \dots, \quad y_k = x_{\mathcal{N}_k} - x_{\mathcal{N}_{k-1}}, \quad \dots \dots$$

نلاحظ أنَّ:

$$\mathcal{N}_2, \mathcal{N}_1 \geq \mathcal{N}_1 \quad \Rightarrow \quad \|y_2\| = \|x_{\mathcal{N}_2} - x_{\mathcal{N}_1}\| < \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{N}_3, \mathcal{N}_2 \geq \mathcal{N}_2 \quad \Rightarrow \quad \|y_3\| = \|x_{\mathcal{N}_3} - x_{\mathcal{N}_2}\| < \frac{1}{2^2}$$

$$\mathcal{N}_k, \mathcal{N}_{k-1} \geq \mathcal{N}_{k-1} \Rightarrow \|y_k\| = \|x_{\mathcal{N}_k} - x_{\mathcal{N}_{k-1}}\| < \frac{1}{2^{k-1}}$$

وَأَنَّ:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|y_n\| = \|y_1\| + \sum_{n=2}^{+\infty} \|y_n\| < \|y_1\| + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < +\infty$$

هذا يبيّن أنّ المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$  متقاربة بالإطلاق، ومنه متقاربة (حسب الفرض)، وبالتالي المتتالية  $(x_{\mathcal{N}_k})_{k \in \mathbb{N}}$  متقاربة.

وبما أنّ  $(x_{\mathcal{N}_k})_{k \in \mathbb{N}}$  متتالية جزئية من متتالية لكوشي  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ، فإنّ المتتالية  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة.

وبما أنّ  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية لكوشي كفيّة من عناصر الفضاء  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ ، نستنتج أنّ الفضاء  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  تامّ. (9) أثبت أنّ كلّ متسلسلة متقاربة بالإطلاق في فضاء باناخ متقاربة.

الحل:

ليكن  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  فضاء باناخ، ولتكن  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$  متسلسلة متقاربة بالإطلاق.

بما أنّ  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  فضاء باناخ (أي فضاء مُنظّم فيه كلّ متتالية لكوشي متقاربة) يكفي إثبات أنّ متتالية المجاميع الجزئية  $(S_n = \sum_{k=1}^n x_k)_{n \in \mathbb{N}}$  هي متتالية لكوشي.

بما أنّ المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$  متقاربة بالإطلاق لأيّ  $\varepsilon > 0$  يوجد  $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$  بحيث أنّ  $\sum_{n=\mathcal{N}+1}^{+\infty} \|x_n\| < \varepsilon$ .

لأجل  $m > n > \mathcal{N}$  فإنّ:

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|x_k\| \leq \sum_{k=\mathcal{N}+1}^{+\infty} \|x_k\| < \varepsilon$$

هذا يبيّن أنّ  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية لكوشي في فضاء تامّ فهي متقاربة، وبالتالي المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$  متقاربة.

## صفحة 98

(4) بيّن أنّ النّظام المتكافئة على فضاء متجه  $\mathbb{X}$  تولّد تولوجيا واحدة على  $\mathbb{X}$ .

الحل:

ليكن  $\|\cdot\|$  و  $\|\cdot\|_0$  نظيمين متكافئين على فضاء متجه  $\mathbb{X}$ ، عندئذٍ يوجد ثابتان موجبان  $a$  و  $b$  بحيث لأي  $x \in \mathbb{X}$  فإن:

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0$$

ليبان أن النّظيمين  $\|\cdot\|$  و  $\|\cdot\|_0$  يولّدان نفس التّبولوجيا على  $\mathbb{X}$  يجب بيان أن المجموعات المفتوحة في  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  و  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_0)$  هي ذاتها.

ليكن

$$T: (\mathbb{X}, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{X}, \|\cdot\|_0) \quad x \mapsto Tx = x$$

لتكن نقطةً كفيّةً من  $\mathbb{X}$ .

لأي  $\varepsilon > 0$  لنختر  $\delta = a\varepsilon > 0$ ، عندئذٍ لأي  $x$  من  $\mathbb{X}$  تحقّق  $\|x - x_0\| < \delta$  فإن:

$$\|Tx - Tx_0\|_0 = \|x - x_0\|_0 \leq \frac{1}{a}\|x - x_0\| < \frac{1}{a}\delta = \frac{a\varepsilon}{a} = \varepsilon$$

أي  $T$  مستمرٌّ عند  $x_0$ ، ولما كانت  $x_0$  نقطةً كفيّةً من  $\mathbb{X}$  فإن  $T$  مستمرٌّ على  $\mathbb{X}$ .

إذا كانت  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{X}$  مجموعةً مفتوحةً في  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_0)$  فإن  $T^{-1}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$  مجموعةً مفتوحةً في  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ .

ليكن

$$S: (\mathbb{X}, \|\cdot\|_0) \rightarrow (\mathbb{X}, \|\cdot\|) \quad x \mapsto Sx = x$$

لتكن  $x_0$  نقطةً كفيّةً من  $\mathbb{X}$ .

لأي  $\varepsilon > 0$  لنختر  $\delta = \frac{\varepsilon}{b} > 0$ ، عندئذٍ لأي  $x$  من  $\mathbb{X}$  تحقّق  $\|x - x_0\|_0 < \delta$  فإن:

$$\|Sx - Sx_0\| = \|x - x_0\| \leq b\|x - x_0\|_0 < b\delta = \frac{b\varepsilon}{b} = \varepsilon$$

أي  $S$  مستمرٌّ عند  $x_0$ ، ولما كانت  $x_0$  نقطةً كفيّةً من  $\mathbb{X}$  فإن  $S$  مستمرٌّ على  $\mathbb{X}$ .

إذا كانت  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{X}$  مجموعةً مفتوحةً في  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  فإن  $S^{-1}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$  مجموعةً مفتوحةً في  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_0)$ .

(5) إذا كان  $\|\cdot\|$  و  $\|\cdot\|_0$  نظيمين متكافئين على  $\mathbb{X}$ ، فبيّن أن متتاليات كوشي واحدة في الفضاءين  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  و

$(\mathbb{X}, \|\cdot\|_0)$ .

الحل:

لتكن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية لكوشي من عناصر الفضاء  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ ، عندئذٍ:

لأي  $\varepsilon > 0$  يوجد يوجد  $\mathcal{N}_1 \in \mathbb{N}$  بحيث أن  $\|x_m - x_n\| < a\varepsilon$  لأي  $m, n > \mathcal{N}_1$ .

ومنه:

$$\|x_m - x_n\|_0 \leq \frac{1}{a} \|x_m - x_n\| < \frac{1}{a} a\varepsilon = \varepsilon$$

لأي  $m, n > \mathcal{N}_1$  هذا يبيّن أن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية لكوشي من عناصر الفضاء  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_0)$ .

لتكن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية لكوشي من عناصر الفضاء  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_0)$ ، عندئذٍ:

لأي  $\varepsilon > 0$  يوجد يوجد  $\mathcal{N}_2 \in \mathbb{N}$  بحيث أن  $\|x_m - x_n\|_0 < \frac{\varepsilon}{b}$  لأي  $m, n > \mathcal{N}_2$ .

ومنه:

$$\|x_m - x_n\| \leq b \|x_m - x_n\|_0 < b \frac{\varepsilon}{b} = \varepsilon$$

لأي  $m, n > \mathcal{N}_2$  هذا يبيّن أن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية لكوشي من عناصر الفضاء  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ .

(9) إذا كان النّظيمان  $\|\cdot\|$  و  $\|\cdot\|_0$  على فضاء متجهي  $\mathbb{X}$  متكافئين، فبيّن صحّة ما يلي:

$$\|x_n - x\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \iff \|x_n - x\|_0 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

الحل:

إذا كانت  $\|x_n - x\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  فإنّ  $\|x_n - x\|_0 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ ، ومنه:

$$\|x_n - x\|_0 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

إذا كانت  $\|x_n - x\|_0 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  فإنّ  $\|x_n - x\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ ، ومنه:

$$\|x_n - x\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

(9) إذا كان  $\mathbb{X}$  فضاءً مترياً متراساً، وكانت  $\mathcal{M}$  مجموعةً جزئيةً مغلقةً في  $\mathbb{X}$ ، فبين أن  $\mathcal{M}$  متراساً.

الحل:

نميز حالتين:

•  $\mathcal{M} = \phi$  فإن  $\mathcal{M}$  متراساً.

•  $\mathcal{M} \neq \phi$

لتكن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتاليةً من عناصر المجموعة  $\mathcal{M}$ ، فإن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتاليةً من عناصر الفضاء  $\mathbb{X}$  المتراس، لذا تحوي المتتالية  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتاليةً جزئيةً  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  متقاربة من عنصر  $x$  من  $\mathbb{X}$ .

إن  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  متتاليةً من عناصر المجموعة  $\mathcal{M}$  (كون  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  متتاليةً جزئيةً من  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) متقاربة من  $x \in \mathbb{X}$ ، وبما أن المجموعة  $\mathcal{M}$  مغلقةً (فرضاً)، نجد  $x \in \mathcal{M}$ .

أي تحوي المتتالية  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  من عناصر  $\mathcal{M}$  متتاليةً جزئيةً  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  متقاربة في  $\mathcal{M}$ ، ولما كانت  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتاليةً كيفيةً من عناصر  $\mathcal{M}$ ، نستنتج أن المجموعة  $\mathcal{M}$  متراساً.