معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثانية

المعادلات التفاضلية1

المحاضرة 3

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2019-2023

◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄ المحاضرة : الثالثة

◄ عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية المتجانسة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- المعادلات التفاضلية المتجانسة
2- المعادلات التفاضلية القابلة لفصل المتحولات
3- امثلة

"المعادلات التفاضلية المتجانسة"

تعريف 1 : نقول عن الدالة $f(x, y)$ أنها متجانسة من الدرجة n إذا تحقق ما يلي:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

حيث $\lambda \neq 0$ عدد حقيقي موجب

نقول عنها انها من الدرجة الأولى إذا كان $n = 1$

تعريف 2 : نقول عن المعادلة التفاضلية $y' = f(x, y)$ أنها متجانسة اذا كانت الدالة $f(x, y)$ متجانسة و لإيجاد الحل العام نفهرض أن $z = \frac{y}{x}$ أي أن $y = zx$

نفاضل $y' = z + xz'$ و هي معادلة قابلة للفصل

امثلة: اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$$

الحل

نبدل كل (x, y) ب $(\lambda x, \lambda y)$

فتصبح المعادلة بالشكل $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 zxy = \lambda^2 f(x, y)$

فالمعادلة متجانسة من الدرجة الثانية

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$

الحل:

لدينا الدالة:

$$f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$$

$$\Rightarrow f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda x+\lambda y}{\lambda x-\lambda y}=\frac{\lambda(x+y)}{\lambda(x-y)}=\frac{x+y}{x-y}$$

إذاً المعادلة التفاضلية متجانسة لأنها من الشكل $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y);n=0$

ولإيجاد الحل العام لها نقسِّم البسط والمقام (في الطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية) على x:

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

والآن نفرض: $\boldsymbol{z=\frac{y}{x}}$

$$\Rightarrow y=z.x \quad \text{بالاشتقاق} \quad \Rightarrow y'=z+x.z'$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية يكون:

$$z+x.z'=\frac{1+z}{1-z}$$

$$\Rightarrow x.z'=\frac{1+z}{1-z}-z=\frac{1+z-z+z^2}{1-z}\Rightarrow x.z'=\frac{1+z^2}{1-z}$$

وهي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات

$$\boldsymbol{x.y'=x.e^{\frac{y}{x}}+y}$$

الحل:

نقسم الطرفين على $x \neq 0$:

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

لدينا الدالة:

$$f(x, y) = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}} + \frac{\lambda y}{\lambda x} = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = f(x, y)$$

إذاً المعادلة التفاضلية متجانسة من الدرجة صفر لأن: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y); n = 0$

لإيجاد الحل العام نفرض: $\boldsymbol{z = \frac{y}{x}}$

$$\Rightarrow y = x.z \text{ بالاشتقاق } \Rightarrow y' = z + x\,z'$$

نعوض في المعادلة:

$$z + x\,z' = e^z + z \Rightarrow x\,z' = e^z$$

وهذه المعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات

المعادلات التفاضلية الغير قابلة لفصل المتحولات.

- يوجد الكثير من المعادلات التفاضلية التي لا يمكن فصل متحولاتها ولكن يمكن ردها الى معادلات تفاضلية قابلة لفصل المتحولات وذلك بإجراء تحويل على المتغير او الدالة وهذه المعادلة هي من الشكل: $\frac{dy}{dx} = y' = f(ax + by + c)\ ; a, b, c \in \mathbb{R}$

  نجري التحويل على الشكل التالي:

  1- نفرض ان $z = ax + by + c$

  2- نفاضل الطرفين: $dz = a\,dx + b\,dy$

  3- نقسم المعادلة على $dx \Leftarrow \frac{dz}{dx} = a + b\,\frac{dy}{dx}$

ولكن نعلم ان : $\frac{dy}{dx} = f(z)$ وبالتالي يكون : $\frac{dz}{dx} = a + b\,f(z)$ وهي " معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات"

أي ان : $dx = \frac{dz}{a+b\,f(z)}$ وبالمكاملة نجد $x = \int \frac{dz}{a+b\,f(z)} + c$ وهو "الحل العام"

امثلة:

اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الاتية:

$$y' = x + y + 1$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = x + y + 1$$

1- نفرض ان $z = x + y + 1$

2- نفاضل الطرفين فنجد ان : $dz = dx + dy$

3- نقسم المعادلة على dx فيكون $\frac{dz}{dx} = 1 + z$

$$\Rightarrow dx = \frac{dz}{1+z} \xRightarrow[\text{بالمكاملة}]{} x = \ln(1+z) + \ln(c) \Rightarrow x = \ln((1+z).c)$$

$$(1+z).c = e^x \Rightarrow 1 + z = c_1 e^x \quad ; \; c_1 = \frac{1}{c}$$

$$\xRightarrow[\text{بتعويض قيمة } x]{} 1 + y + x + 1 = c_1 . e^x \Rightarrow y = c_1 e^x - x - 2$$ وهو "الحل العام"

$$y' = \frac{1}{x + y - 1}$$

الحل:

نلاحظ انها معادلة تفاضلية ترد الى معادلة قابلة لفصل المتحولات وذلك بإجراء التحويل التالي:

1- نفرض ان : $z = x + y - 1$

2- بمفاضلة الطرفين: $dz = dx + dy$ نقسم على dx فيصبح لدينا

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z+1}{z}$$

وهي " معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات "

$$dx = \left(\frac{z}{z+1}\right) dz \Rightarrow dx = \left(1 - \frac{1}{z+1}\right) dz \xrightarrow[\text{بالمكاملة}]{}$$

$$x = z - \ln(z+1) + c \Rightarrow x - z + \ln(z+1) = c$$

وبتعويض قيمة $z = x + y - 1$ نحصل على الحل العام وهو

$$1 - y + \ln(x+y) = c$$

انتهت المحاضرة

"مهما كان القادم مجهولاً افتح عينيك للأحلام والطموح . . .

فغداً يوم جديد . . .

وغداً أنت شخص جديد"